

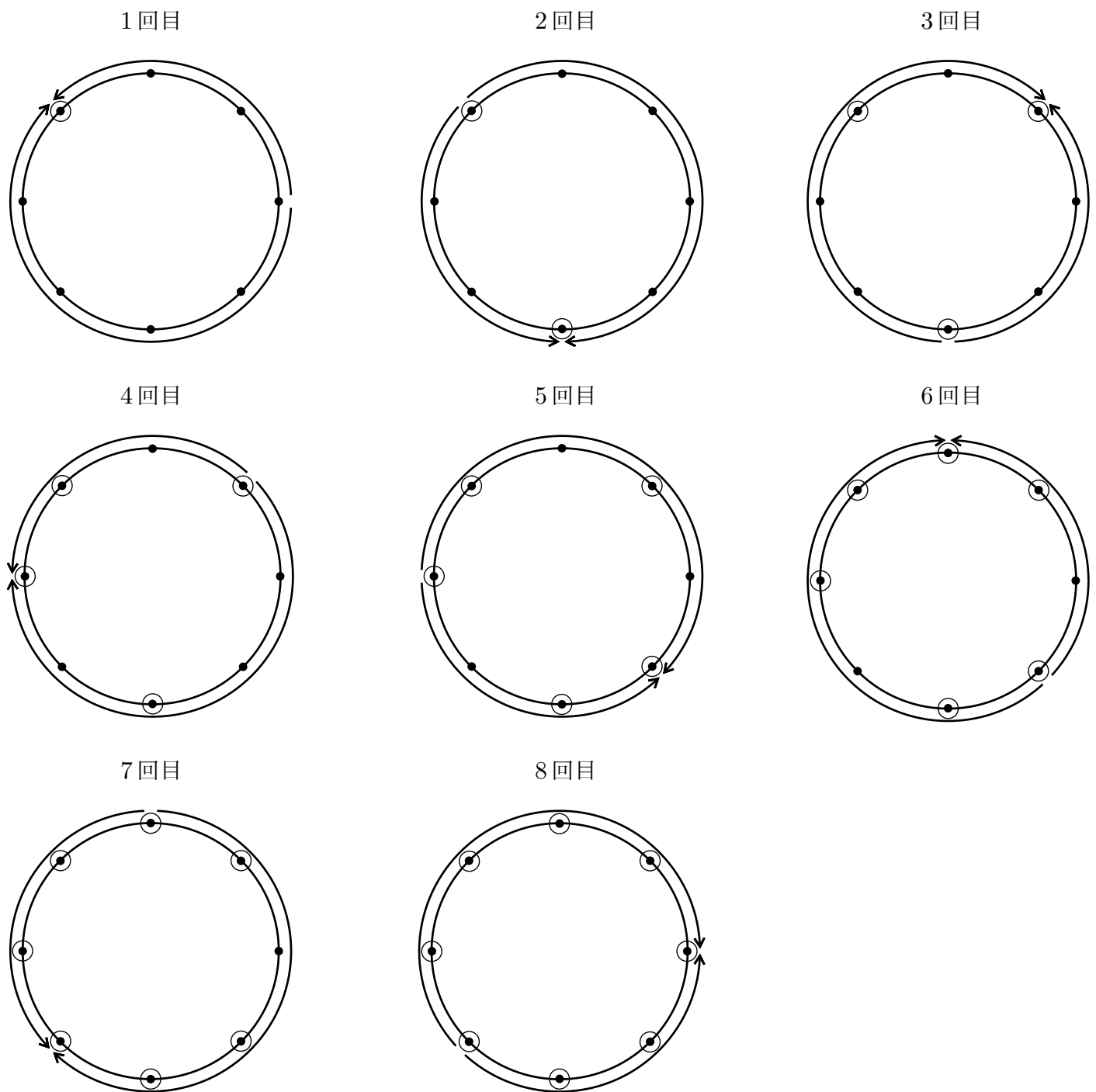
答 (1) 7回

(2) 1:14, 2:13, 4:11, 7:8

(3) 11m, 5回

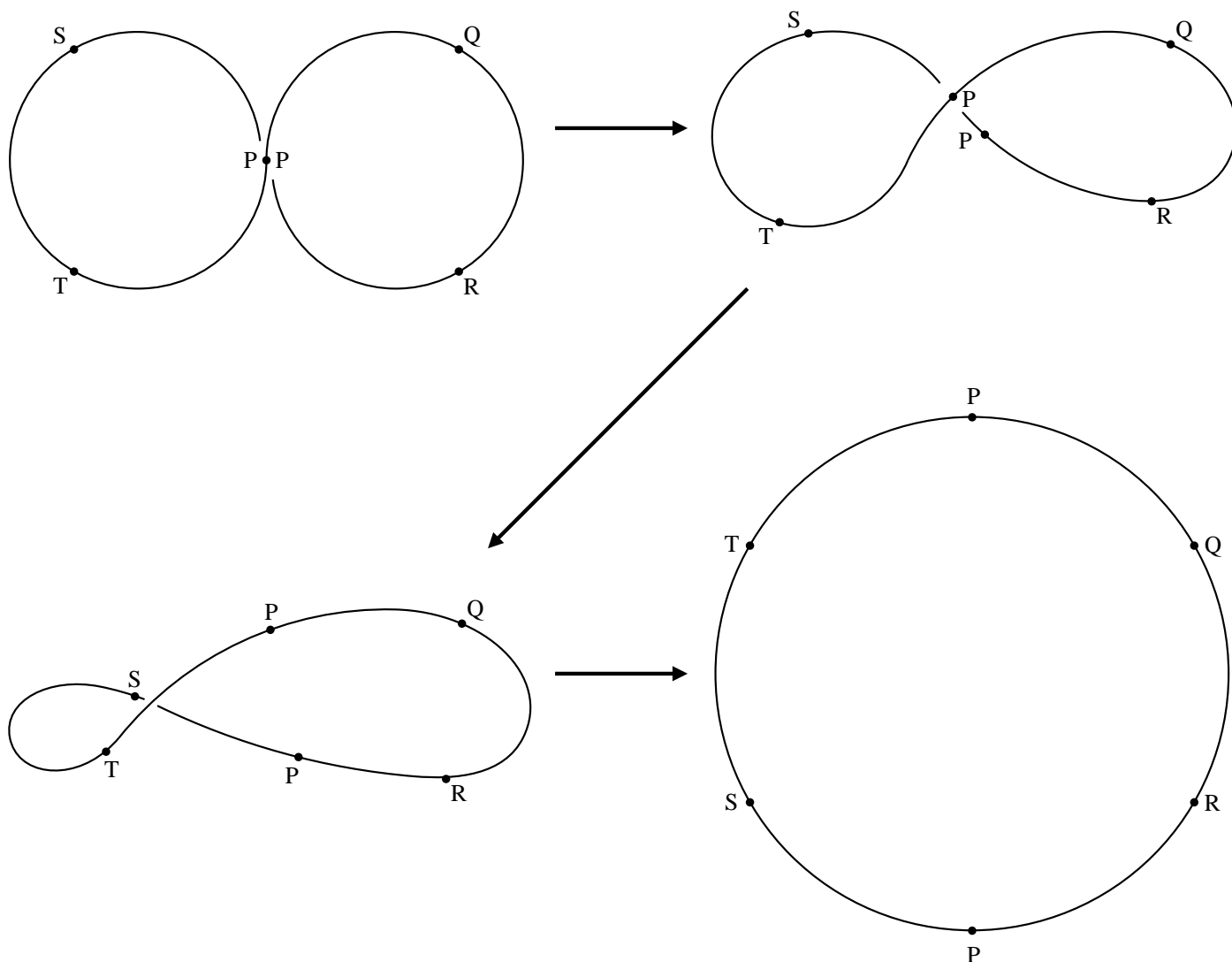
(4) 1:12, 2:11, 3:10, 4:9, 5:8, 6:7, 1:13, 3:11, 5:9

解説 (1) 点 A と点 B の速さの比は 3:5 なので, 2 点と同時に出発してからすれ違うまでに動く移動距離の比も 3:5 になります。2 点がすれ違う地点がどのように分布するか調べると, 次のような図が描けます。2 点が 8 回出会うと, 円周上の 8 等分点がそれぞれ 1 つずつ選ばれる事が分かります。



したがって, 2 点 は 出 発 し て か ら 同 時 に 地 点 P に 戻 っ て 止 ま る ま で に, 地 点 P 以 外 で $8 - 1 = 7$ 回 すれ違 っ ち ます。

- (2) (1) で速さが $3:5$ のとき $3+5=8$ 等分点を考え、地点 P 以外で $8-1=7$ 回すれ違っていたことをふまえて考えると、地点 P 以外で 14 回すれ違ったということは、円周を $14+1=15$ 等分する地点ですれ違っていることになるので、前項と後項の和が 15 になるように速さの比を定めれば良いと分かります。点 A よりも点 B の方が速く動くので、求める速さの比は、 $1:14$, $2:13$, $4:11$, $7:8$ になります。
- (3) 次のように図を変形させて考えてみましょう。



最後にできた円周を、点 A は $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow \dots$ の順に、時計回りに移動します。また、点 B は $P \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow \dots$ の順に、反時計回りに移動します。円周の長さは $1 \times 2 = 2\text{m}$ です。

点 A と点 B の速さの比は $3:8$ なので、(1) と同様に考えると、長さ 2m の円周上をそれぞれ、点 A は 3 周、点 B は 8 周して出発地点である P に戻って来ることとなりますが、それよりも前に、点 A が $3 \div 2 = 1.5$ 周、点 B が $8 \div 2 = 4$ 周したときにも、2 点 A と B は地点 P で出会います。この場合、長さ 2m の周上で、A と B は結ぶと円の直径が描ける向かい合う位置にあることとなりますが、変形させる前の図に戻して考えれば、同一の地点 P 上で重なっていることとなります。

このとき、2 点 A, B が動いた道のりは合計 $2 \times (1.5 + 4) = 11\text{m}$ です。

また、2 点 A, B の速さの比が $3:8$ であることから、A と B が同時に出発してから長さ 2m の円周上をそれぞれ 3 周と 8 周するとき、A, B がすれ違った地点は円周上の $3+8=11$ 等分点（このうち、1 つは最後に重なった地点 P）になります。P 以外の地点は $11-1=10$ カ所です。点 A が 3 周する間に地点 P 以外で 10 回すれ違うのですから、点 A が 1.5 周する間に地点 P 以外で $10 \div 2 = 5$ 回すれ違うこととなります。

- (4) (3)と同様に考えると、2点 A, B の速さの比の前項と後項を足した和は13または14になると分かります。実際、和が13の場合に、2点 A, B のすれ違う地点は長さ2mの円周上の13等分点になるので、2点 A, B は地点 P を出発してから再び地点 P に戻って止まるまでに、地点 P 以外で $(13-1) \div 2 = 6$ 回すれ違うこととなります。また、和が14の場合に、2点 A, B のすれ違う地点は長さ2mの円周上の14等分点になり、今度はこの14地点のうち2地点が P になるので、2点 A, B は地点 P を出発してから再び地点 P に戻って止まるまでに、地点 P 以外でやはり $(14-2) \div 2 = 6$ 回すれ違うこととなります。

点 A よりも点 B の方が速く動くことに注意すると、和が13のときの2点 A, B の速さの比は $1:12, 2:11, 3:10, 4:9, 5:8, 6:7$ が考えられます。また、和が14のときの2点 A, B の速さの比は $1:13, 3:11, 5:9$ が考えられます。以上が問題文のいう9通りの速さの比となります。