

- 答 (1) 24個  
 (2) 279個  
 (3) 36回

解説 (1) 1グループに並んでいる分数の分母は $1+1=2$ , 2グループに並んでいる分数の分母は $2+1=3$ , 3グループに並んでいる分数の分母は $3+1=4$ , ……のように, グループの数に1を足すと, 各グループに並んでいる分数の分母が分かります。そのため, 71グループに並んでいる分数の分母は $71+1=72$ になります。そこで,  $\frac{\square}{72}$ の形をした既約分数の個数を求めます。最初に□の候補として考えられるのは, 1以上71以下の整数ですが, 72を素因数分解すると,

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

なので, □に当てはまる整数は, 2でも3でも割り切れない, 1以上71以下の整数であると分かります。

$71 \div 2 = 35$ あまり1なので, 1から71までに2の倍数は35個あります。

$71 \div 3 = 23$ あまり2なので, 1から71までに3の倍数は23個あります。

今求めた35個と23個は, 6の倍数が共通しているので, 6の倍数の個数も求めましょう。

$71 \div 6 = 11$ あまり5なので, 1から71までに6の倍数は11個あります。

以上より, 1から71までに, 2または3で割り切れる整数は $35 + 23 - 11 = 47$ 個あると分かります。したがって, 1から71までに, 2でも3でも割り切れない整数は $71 - 47 = 24$ 個あると分かり, これが答えになります。

(1) 別解 72を素因数分解したかけ算を見ると2と3という素数が見つかることから, 答えを

$$72 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24 \text{個}$$

と求めることもできます。

(2) 1グループから420グループまでなので, 並んでいる分数の分母として2から421までを考えることになりましたが, 問題文を見ると, 分子が3の分数は $\frac{3}{4}$ から始まっているので, 実際には4から421までの $421 - 4 + 1 = 418$ 個の数を分母を持つ分数それぞれについて考えればよいと分かります。

分子が3で分母が3の倍数である分数は約分できるので, 求める個数は, 分子が3で分母は3で割り切れない分数の個数です。そこで, 4から421までの418個のうち, 3の倍数ではない整数の個数を調べます。

4から421までの整数のうち3の倍数の個数を調べると,  $3 \times 2 = 6$ から $3 \times 140 = 420$ までの $140 - 2 + 1 = 139$ 個あります。したがって, 求める個数は,  $418 - 139 = 279$ 個と分かります。

(3) 20グループから30グループまでなので, 分数の分母は, 21から31までを考えることになりました。

① 分母が21の場合。分子の候補は1から20までの整数で, このうち, 5の倍数は5, 10, 15, 20ですが,  $\frac{15}{21}$ は約分できるので, 問題文の分数列には並びません。そこで,  $5 \times 10 \times 20$ を考えると,

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{10} \times \frac{4}{20}$$

のように, 5で3回割り切れます。

② 分母が22の場合。分子の候補は1から21までの整数で, このうち, 5の倍数は5, 10, 15, 20ですが,  $\frac{10}{22}$ と $\frac{20}{22}$ は約分できるので, 問題文の分数列には並びません。そこで,  $5 \times 15$ を考えると,

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{15}$$

のように, 5で2回割り切れます。

- (3) の続き ③ 分母が23の場合。分子の候補は1から22までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20です。そこで、 $5 \times 10 \times 15 \times 20$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{15} \times \frac{4}{20}$$

のように、5で4回割り切れます。

- ④ 分母が24の場合。分子の候補は1から23までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20ですが、 $\frac{10}{24}$ と $\frac{15}{24}$ と $\frac{20}{24}$ は約分できるので、問題文の分数列には並びません。そこで、5を考えると、

$$\frac{1}{5}$$

のように、5で1回割り切れます。

- ⑤ 分母が25の場合。分子が5の倍数であるといずれも約分できるので、問題文の分数列には並びません。したがって、この場合は5で割り切れる回数は数えません。

- ⑥ 分母が26の場合。分子の候補は1から25までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20, 25ですが、 $\frac{10}{26}$ と $\frac{20}{26}$ は約分できるので、問題文の分数列には並びません。そこで、 $5 \times 15 \times 25$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{15} \times \frac{1}{25}$$

のように、5で4回割り切れます。

- ⑦ 分母が27の場合。分子の候補は1から26までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20, 25ですが、 $\frac{15}{27}$ は約分できるので、問題文の分数列には並びません。そこで、 $5 \times 10 \times 20 \times 25$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{10} \times \frac{4}{20} \times \frac{1}{25}$$

のように、5で5回割り切れます。

- ⑧ 分母が28の場合。分子の候補は1から27までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20, 25ですが、 $\frac{10}{28}$ と $\frac{20}{28}$ は約分できるので、問題文の分数列には並びません。そこで、 $5 \times 15 \times 25$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{15} \times \frac{1}{25}$$

のように、5で4回割り切れます。

- ⑨ 分母が29の場合。分子の候補は1から28までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20, 25です。そこで、 $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{15} \times \frac{4}{20} \times \frac{1}{25}$$

のように、5で6回割り切れます。

- ⑩ 分母が30の場合。分子が5の倍数であるといずれも約分できるので、問題文の分数列には並びません。したがって、この場合は5で割り切れる回数は数えません。

- ⑪ 分母が31の場合。分子の候補は1から30までの整数で、このうち、5の倍数は5, 10, 15, 20, 25, 30です。そこで、 $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30$ を考えると、

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{15} \times \frac{4}{20} \times \frac{1}{25} \times \frac{6}{30}$$

のように、5で7回割り切れます。

以上①～⑪より求める回数は

$$3 + 2 + 4 + 1 + 0 + 4 + 5 + 4 + 6 + 0 + 7 = 36 \text{ 回}$$