

- 答 (1) 4～10  
 (2) 18～22  
     9～16  
 (3) 8通りの並べ方があり、それぞれ3, 5, 8, 9, 15, 24, 25, 40種類の整数を使う

解説 問題文中にある3マス四方の正方形と、6マス四方の正方形に関する答えの例が正しいことを最初に確かめます。3マス四方の正方形は全部で9マスあります。3個以上の連続する整数の和が9になるのですから、 $2+3+4=9$ 以外にないことはすぐに分かります。実際、並べることのできる整数は1以上なので、4個の連続する整数について最も小さな和は $1+2+3+4=10>9$ となり、連続する4個以上の整数は答えにはなりません。すると、答えは3個の連続する整数の場合に限られ、 $2+3+4=9$ だと分かります。また、6マス四方の正方形は全部で36マスあります。連続する3個の整数の和になる場合から始めて個数を1個ずつ増やし和を調べてもできますが、次の公式

$$\text{連続する整数の和} = \text{真ん中の数} \times \text{個数}$$

を利用すると、答えの見通しが良くなるでしょう。たとえば $1+2+3+4+5$ は、真ん中の数が3で、足す数の個数が5個なので、 $3 \times 5 = 15$ と和が求まります。また、 $1+2+3+4+5+6$ は、真ん中の数が3.5(3と4の平均)で、足す数の個数が6個なので、 $3.5 \times 6 = 21$ と和が求まります。 $7+8+9$ であれば、真ん中の数が8で、足す数の個数が3個なので、和は $8 \times 3 = 24$ です。 $7+8+9+10$ は、真ん中の数が8.5(8と9の平均)で、足す数の個数が4個なので、和は $8.5 \times 4 = 34$ になります。こうした例からも分かるように、奇数個のとき真ん中の数は整数になり、偶数個のとき真ん中の数は整数+0.5になります。

さて、36を2個の整数の積の形に表すと、

$$1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, 6 \times 6, 9 \times 4, 12 \times 3, 18 \times 2, 36 \times 1$$

このどれかが36を表す「真ん中の数×個数」の式になっているとすると、真ん中の数が整数なので、個数は奇数個で、問題文の条件から3個以上でなければなりません。そこで、上に挙げた式の中からは $4 \times 9$ と $12 \times 3$ が候補に選ばれますが、具体的に数を並べて和を求めようとするとうまくいかないように、真ん中の数を4として9個の整数の和を取ることはできません(1より小さい整数は並べられないため)。次の候補である、真ん中の数を12として3個の整数を足し合わせる $11+12+13=36$ が1つの答えになります。

また、36を(整数+0.5)×個数の形に表すと、

$$0.5 \times 72, 1.5 \times 24, 4.5 \times 8$$

これは、先に挙げた「整数×整数」の式の中から奇数×整数の形になっている式を選び、奇数は半分にし、かけるもう一つの数は2倍して

$$1 \times 36 = 0.5 \times 72, 3 \times 12 = 1.5 \times 24, 9 \times 4 = 4.5 \times 8$$

のように作った式です。1より小さい整数は並べられないため、0.5を真ん中の数として連続する72個の整数を並べたり、1.5を真ん中の数として連続する24個の整数を並べたりすることはできません。4.5を真ん中の数として8個の連続する整数を足し合わせる $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ がもう1つの答えになります。

以上より、問題文中に書かれた例の正しいことが確認できました。

問題を解く方針をまとめると、

- ① 与えられたマスの総数を2個の整数の積の形に表せるだけ表す。
- ② ①で探した候補の中から整数×奇数の形に書き表されている式を選び、「真ん中の数×個数」と解釈して、和が作れる式から答えを求める。
- ③ 次に、①で探した候補の中から奇数×整数の形に書き表されている式を選び、奇数は半分にし、かけるもう一つの数に2倍して、(整数+0.5)×個数の形をした式を作る。これを、「真ん中の数×個数」と解釈して、和が作れる式から答えを求める。

- (1)  $7 \times 7 = 49$  を2個の整数の積の形に表すと、

$$1 \times 49, 7 \times 7, 49 \times 1$$

$1 \times 49$ については、真ん中の数を1として連続する49個の整数を並べることはできません。 $7 \times 7$ については、真ん中の数を7として連続する7個の整数を並べると、 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49$ が見つかります。 $49 \times 1$ は個数が3個以上であることに反しています。

次に、49を(整数+0.5)×個数の形に表すと、

$$0.5 \times 98, 3.5 \times 14, 24.5 \times 2$$

$0.5 \times 98$ については、真ん中の数を0.5として連続する98個の整数を並べることはできません。 $3.5 \times 14$ についても、真ん中の数を3.5として連続する14個の整数を並べることはできません。 $24.5 \times 2$ は個数が3個以上であることに反しています。

- (2)  $10 \times 10 = 100$  を2個の整数の積の形に表すと、

$$1 \times 100, 2 \times 50, 4 \times 25, 5 \times 20, 10 \times 10, 20 \times 5, 25 \times 4, 50 \times 2, 100 \times 1$$

このうち個数が奇数個の式を選んで調べると、 $4 \times 25$ については、真ん中の数を4として25個の整数を並べることはできません。 $20 \times 5$ については、真ん中の数を20として5個の整数を並べると、 $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$ が見つかります。 $100 \times 1$ は個数が3個以上であることに反しています。

次に、100を(整数+0.5)×個数の形に表すと、

$$0.5 \times 200, 2.5 \times 40, 12.5 \times 8$$

$0.5 \times 200$ については、真ん中の数を0.5として連続する200個の整数を並べることはできません。 $2.5 \times 40$ についても、真ん中の数を2.5として連続する40個の整数を並べることはできません。 $12.5 \times 8$ については、真ん中の数を12.5として連続する8個の整数を並べると、 $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100$ が見つかります。

- (3)  $30 \times 30 = 900$  を2個の整数の積の形に表すと、

$$1 \times 900, 2 \times 450, 3 \times 300, 4 \times 225, 5 \times 180, 6 \times 150, 9 \times 100, 10 \times 90, 12 \times 75, 15 \times 60, \\ 18 \times 50, 20 \times 45, 25 \times 36, 30 \times 30, 36 \times 25, 45 \times 20, 90 \times 10, 60 \times 15, 75 \times 12, 90 \times 10, \\ 100 \times 9, 150 \times 6, 180 \times 5, 225 \times 4, 300 \times 3, 450 \times 2, 900 \times 1$$

このうち個数が奇数個の式を選んで調べると、 $4 \times 225$ については、真ん中の数を4として連続する225個の整数を並べることはできません。 $12 \times 75$ についても、真ん中の数を12として連続する75個の整数を並べることはできません。 $20 \times 45$ についても、真ん中の数を20として連続する45個の整数を並べることはできません。 $36 \times 25$ については、真ん中の数を36として連続する25個の整数を並べると、 $24 + 25 + \dots + 47 + 48 = 900$ が見つかります。 $60 \times 15$ については、真ん中の数を60として連続する15個の整数を並べると、 $53 + 54 + \dots + 66 + 67 = 900$ が見つかります。 $100 \times 9$ については、真ん中の数を100として連続する9個の整数を並べると、 $96 + 97 + \dots + 103 + 104 = 900$ が見つかります。 $180 \times 5$ については、真ん中の数を180として連続する5個の整数を並べると、 $178 + 179 + 180 + 181 + 182 = 900$ が見つかります。 $300 \times 3$ については、真ん中の数を300として連続する3個の整数を並べると、 $299 + 300 + 301 = 900$ が見つかります。 $900 \times 1$ は個数が3個以上であることに反しています。

次に、900 を (整数 + 0.5) × 個数 の形に表すと、

$$0.5 \times 1800, 1.5 \times 600, 2.5 \times 360, 4.5 \times 200, 7.5 \times 120, \\ 12.5 \times 72, 22.5 \times 40, 37.5 \times 24, 112.5 \times 8$$

1 より小さい数を並べることはできないので、 $0.5 \times 1800, 1.5 \times 600, 2.5 \times 360, 4.5 \times 200, 7.5 \times 120, 12.5 \times 72$  については連続する整数を足し合わせて 900 にすることはできません。 $22.5 \times 40$  については、真ん中の数を 22.5 として連続する 40 個の整数を並べると、 $3 + 4 + \dots + 41 + 42 = 900$  が見つかります。 $37.5 \times 24$  については、真ん中の数を 37.5 として連続する 24 個の整数を並べると、 $26 + 27 + \dots + 48 + 49 = 900$  が見つかります。 $112.5 \times 8$  については、真ん中の数を 112.5 として連続する 8 個の整数を並べると、 $109 + 110 + 111 + 112 + 113 + 114 + 115 + 116 = 900$  が見つかります。