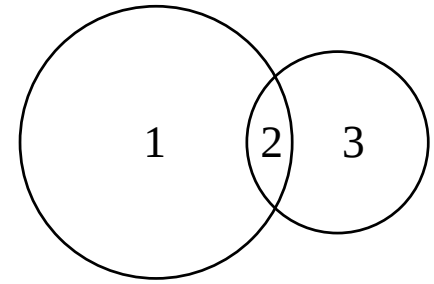


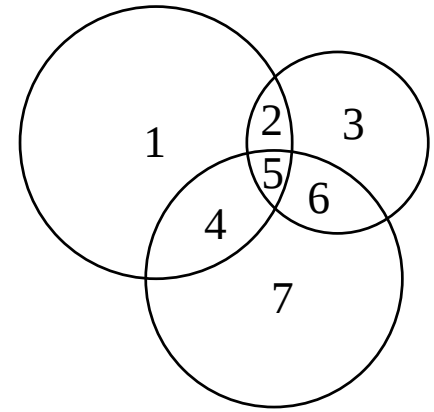
答 (1) 13(個)

(2) 23(個)

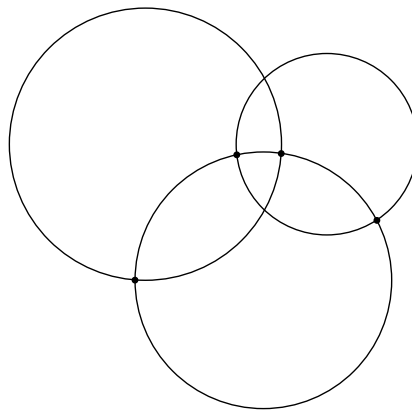
解説 (1) 問題文の、「2個の円が交わるときは、これらの円周で囲まれた図形は、3個の部分に分けることができ」ることを、右の図のように表してみます。



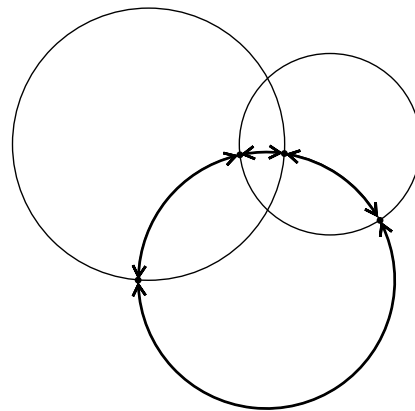
さらに1個円を増やして、3個の円が交わるときは、これらの円周で囲まれた図形は、右の図のように、最大で7個の部分に分けることができます。7個が最大である理由は、次のように考えることができます。



新しく描いた3個目の円は、もともと描かれていた2個の円と計4点で交わっており、点と点の間を結ぶ弧が4本あります（それぞれの弧の両端に矢印をつけて描いてあります）。



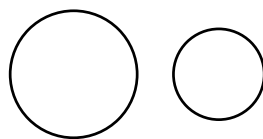
計4点で交わっている



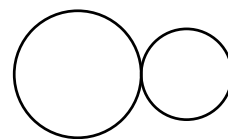
弧が4本ある

円が2個のときに円周で囲まれた図形は3個であったのが、それぞれの弧を描くごとに1個ずつ増えて、計4個多くなり $3 + 4 = 7$ 個になっています。新しい1個の円を描いたときに、元々描かれていた円たちと交わる点の合計の個数だけ、円周で囲まれた図形も増えていることが観察できます。

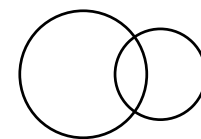
大きさが異なる円と円の位置関係として考えられるのは次の5通りなので、円と円の交わる点として考えられるのは最も多くて2個です。



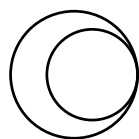
互いの外側に分離している



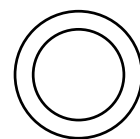
1点で互いの外側に接している



2点で交わる



小さい円が1点で大きい
円の内側に接している



大きい円の内側に小さい円が
接することなくふくまれる

ですから、すでに描かれていた2個の円と、新しく描かれた1個の円とが交わる点は、最大で $2 \times 2 = 4$ 個になります。

では、問 (1) の、円が4個描かれている場合はどうでしょうか。円が3個の場合は、すでに見たように、円周で囲まれた図形は最も多くて7個あります。新しく描いた4個目の円と、すでに描かれていた3個の円とが交わる点は、最大で $2 \times 3 = 6$ 個なので、弧も6本描かれることになり、円周で囲まれた図形は6個増え、 $7 + 6 = 13$ 個になります。これが求めている個数です。

- (2) 問 (1) について調べたことと合わせ考えると、次のように、円の個数に応じた、円周で囲まれた図形の個数が順に分かります。

円が1個の場合、円周で囲まれた図形の個数は1個です。

円が2個の場合、円周で囲まれた図形の個数は最大で $1 + 2 = 3$ 個です。

円が3個の場合、円周で囲まれた図形の個数は最大で $3 + 4 = 7$ 個です。

円が4個の場合、円周で囲まれた図形の個数は最大で $7 + 6 = 13$ 個です。

円が5個の場合、円周で囲まれた図形の個数は最大で $13 + 8 = 21$ 個です。

円が6個の場合、円周で囲まれた図形の個数は最大で $21 + 10 = 31$ 個です。

円の個数が7個以上の場合も同様に、最初の1個から始めて偶数を順に足し合わせると求まります。ですから、問 (2) の個数507個を、1に偶数を2から小さい順に x 個足した和だと考えると、

$$1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \times x = 507$$

が成り立つことになります。ここで、

$$2 + 4 = 6 = 2 \times 3,$$

$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 5 \times 6,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 = 6 \times 7,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56 = 7 \times 8, \cdots,$$

のように、偶数を2から小さい順に x 個足した和は $x \times (x+1)$ と表せるので、 $x \times (x+1)$ が $507 - 1 = 506$ になるような x をさがせば良いと分かります。 $22 \times 23 = 506$ なので、 $x = 22$ です。偶数を22個足しているので、求める円の個数は、 $22 + 1 = 23$ 個です。