

答 7500(組)

解説 1から10までの整数の中には、偶数と奇数が5個ずつあります。

- －  $A$ が偶数である場合。このとき、 $A \times B$ 、 $A \times C$ 、 $A \times D$ を計算した答えはいずれも偶数になるので、与えられた式の答えが偶数になるためには、 $B \times C \times D$ が偶数でなければなりません。 $B$ 、 $C$ 、 $D$ のうち少なくとも1個が偶数であれば $B \times C \times D$ も偶数になるので、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ として考えられる全ての整数の組から3個とも奇数である場合を除くと、 $B \times C \times D$ が偶数になる $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組は

$$10 \times 10 \times 10 - 5 \times 5 \times 5 = 875 \text{ 組}$$

あります。これに、 $A$ に当てはまる整数として考えられる5通りをかけて、与えられた条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組が最初に $5 \times 875 = 4375$ 組見つかります。

- －  $A$ が奇数である場合。 $B$ 、 $C$ 、 $D$ がそれぞれ偶数か奇数かで場合分けをして考えると、
- \*  $B$ 、 $C$ 、 $D$ が全て偶数である場合、 $A \times B$ 、 $A \times C$ 、 $A \times D$ 、 $B \times C \times D$ はいずれも偶数なので、与えられた式の答えも偶数になります。したがって、条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組が新たに $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ 組見つかります。
  - \*  $B$ 、 $C$ 、 $D$ のうち2個が偶数、1個が奇数である場合。たとえば $B$ と $C$ がともに偶数で、 $D$ が奇数であると考えてみましょう。このとき、 $A \times B$ 、 $A \times C$ 、 $B \times C \times D$ は偶数で、 $A \times D$ は奇数なので、与えられた式を計算した答えは奇数になります。したがって、この場合は条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組は存在しません。
  - \*  $B$ 、 $C$ 、 $D$ のうち1個が偶数、2個が奇数である場合。たとえば $B$ が偶数で、 $C$ と $D$ がともに奇数であると考えてみましょう。このとき、 $A \times B$ と $B \times C \times D$ はともに偶数、また、 $A \times C$ と $A \times D$ はともに奇数なので、与えられた式の答えは偶数になり、条件を満たします。同様に、 $C$ が偶数で $B$ と $D$ はともに奇数である場合と、 $D$ が偶数で $B$ と $C$ はともに奇数である場合も考えると、条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組がさらに $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 = 625 \times 3$ 組見つかります。
  - \*  $B$ 、 $C$ 、 $D$ が全て奇数である場合、 $A \times B$ 、 $A \times C$ 、 $A \times D$ 、 $B \times C \times D$ はいずれも奇数なので、与えられた式の答えは偶数になります。よって、条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組が最後に $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ 組見つかります。

以上より、条件を満たす $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の組は全部で

$$4375 + 625 \times (1 + 3 + 1) = 7500 \text{ (組)}$$

あります。