答 (1)　$[13]=7$

(2)　$[81]=1$，$[245]=4$

(3)　$[735]=10$，$[737]=13$，$[739]=16$

(4)　7個

(5)　27種類

解説　問題文中に書かれている $n=10$ の場合に $[10]=7$ となることを，次のように横一列に数を並べて考えてみましょう。

1，4，7，10が残る。	①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，④，$\cancel{5}$，$\cancel{6}$，⑦，$\cancel{8}$，$\cancel{9}$，⑩
最後に残った10から並べ直す。	10，1，4，7
（10を残したので,）1，4を取り除く。7は残る。	⑩，$\cancel{1}$，$\cancel{4}$，⑦
最後に残った7から並べ直す。	7，10
7の次の10を取り除く。7が残り，$[10]=7$ だと分かる。	⑦，$\cancel{10}$

(1)　次のように考えて $[13]=7$ であると分かります。

1，4，7，10，13が残る。	①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，④，$\cancel{5}$，$\cancel{6}$，⑦，$\cancel{8}$，$\cancel{9}$，⑩，$\cancel{11}$，$\cancel{12}$，⑬
最後に残った13から並べ直す。	13，1，4，7，10
13を残し，1，4を取り除く。7は残る。	⑬，$\cancel{1}$，$\cancel{4}$，⑦，10
最後に残った7から並べ直す。	7，10，13
7を残し，10，13を取り除く。	⑦，$\cancel{10}$，$\cancel{13}$

(2)　もし $n=3$ であれば，①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$ となるので，$[3]=1$ です。
次に $n=3\times3=9$ の場合を考えます。次のように考えて $[9]=1$ だと分かります。

1周目　①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，④，$\cancel{5}$，$\cancel{6}$，⑦，$\cancel{8}$，$\cancel{9}$

2周目　①，$\cancel{4}$，$\cancel{7}$

さらに $n=3\times3\times3=27$ の場合を考えると，次のように考えて $[27]=1$ が分かります。

1周目　①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，④，$\cancel{5}$，$\cancel{6}$，……，㉒，$\cancel{23}$，$\cancel{24}$，㉕，$\cancel{26}$，$\cancel{27}$

2周目　①，$\cancel{4}$，$\cancel{7}$，⑩，$\cancel{13}$，$\cancel{16}$，⑲，$\cancel{22}$，$\cancel{25}$

3周目　①，$\cancel{10}$，$\cancel{19}$

$[3]$，$[9]$，$[27]$ のいずれも値が1になりました。これは，3の倍数個に○××を繰り返し続けたために，最初の1が必ず残り続けたからです（たとえば $n=27$ の場合については1周目で27個，2周目で9個，3周目で3個の数の並びを考えています）。

こうして，$n=3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合は $[n]=1$ であることが分かります。

したがって，$n=3\times3\times3\times3=81$ についても，$[81]=1$ が求まります。

また，$[245]$ は次のように求めます。ここまで考えて来たことから，$n=3\times3\times3\times3\times3=243$ の場合は $[243]=1$ であると分かります。これは，243個の数の並びに対して与えられた作業を繰り返すと1番最初の数が残るという意味です。そこで，245個の数の並びを2個減らして243個にすることを考えます。

２と３の２個を取り除く	①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，４，５，６，７，８，９，……，243，244，245
取り除いた直後の４から並べ直す	４，５，６，……，243，244，245，１　（全部で 243 個）
最初の数が残ると分かる	４

これで $[\,245\,]=4$ が求まりました。

(3)　$n=3\times3\times3\times3\times3\times3=729$ に対しては，$[\,729\,]=1$ です。

つまり，729 個の数の並びに対して与えられた作業を繰り返すと１番最初の数が残ります。

したがって，$n=735$ の場合は６個の数を減らせば良いと分かるので，２，３，５，６，８，９を取り除いた直後の 10 が最終的に残ります。こうして $[\,735\,]=10$ だと分かります。

同様に，$n=737$ の場合は８個の数を減らせば良いと分かるので，２，３，５，６，８，９，11，12 を取り除いた直後の 13 が最終的に残ります。つまり $[\,737\,]=13$ です。

最後に $n=739$ の場合は 10 個の数を減らすので，２，３，５，６，８，９，11，12，14，15 を取り除いた直後の 16 が最終的に残ります。これで $[\,739\,]=16$ も求まりました。

(4)　以下，規則性を発見し，書き出して調べます。もう少しスマートな解き方については調べた後に述べます。

$[\,1\,]=1$，$[\,2\,]=1$ は問題文で与えられています。$[\,3\,]=1$ は (2) で最初に調べました。

$n=4$ の場合は，１を残して２と３を取り除いた後に４を残して１を取り除くので，$[\,4\,]=4$ です。

$n=5$ の場合は，１を残して２と３を取り除いた後に４を残して５と１を取り除くので，$[\,5\,]=4$ です。

$n=6$ の場合は，１を残して２と３を取り除いた後に４を残して５と６を取り除き，さらに１を残して４を取り除くので，$[\,6\,]=1$ です。

$[\,7\,]=7$ であることも同様に調べると分かるのですが，次のように考えてみましょう。

１から７の７個から最初に２と３を取り除くと残り５個です。取り除いた直後の４から並べ直すと

４，５，６，７，１

となりますが，$[\,5\,]=4$ がもう分かっているので，作業をさらに繰り返すと，今並べた数の４番目にある７が残ると分かります。

つまり，$[\,7\,]=7$ は，$[\,5\,]=4$ に３を足せば求まります。３を足す理由は，最初に１，２，３の３個のうち２と３を取り除いて１を数の並びの最後に回して考えているからです。

同様に，$[\,8\,]$ は，$n=8-2=6$ のときの $[\,6\,]=1$ に３を足して $[\,8\,]=1+3=4$ と求まります。

次に，$[\,9\,]$ については，$n=9-2=7$ のときの $[\,7\,]=7$ に３を足すと $7+3=10$ になって９よりも大きくなってしまいます。このような場合は $10-9=1$ が $[\,9\,]$ の値であると分かります。実際，１から９の９個から最初に２と３を取り除くと残り７個です。取り除いた直後の４から並べ直すと

４，５，６，７，８，９，１

となりますが，$[\,7\,]=7$ がもう分かっているので，作業をさらに繰り返すと，今並べた数の７番目にある１が残ると分かります。つまり，$7+3=10$ であっても，10 があるはずの９の直後に１が並んでいるので，$[\,9\,]=1$ が得られます。

以上調べたことをまとめると，$[\,n\,]$ の値は次のような手順で求められることが分かります。

$[\,n-2\,]$ の値に３を足す。足した和がもし n よりも大きくなったら n を引く。

手順に従って $[1]$ から $[100]$ までの値を書き出すと以下のようにそれぞれ決まります。

$[1]=1$	$[2]=1$	$[3]=1$	$[4]=4$	$[5]=4$	$[6]=1$
$[7]=7$	$[8]=4$	$[9]=1$	$[10]=7$	$[11]=4$	$[12]=10$
$[13]=7$	$[14]=13$	$[15]=10$	$[16]=16$	$[17]=13$	$[18]=1$
$[19]=16$	$[20]=4$	$[21]=19$	$[22]=7$	$[23]=22$	$[24]=10$
$[25]=25$	$[26]=13$	$[27]=1$	$[28]=16$	$[29]=4$	$[30]=19$
$[31]=7$	$[32]=22$	$[33]=10$	$[34]=25$	$[35]=13$	$[36]=28$
$[37]=16$	$[38]=31$	$[39]=19$	$[40]=34$	$[41]=22$	$[42]=37$
$[43]=25$	$[44]=40$	$[45]=28$	$[46]=43$	$[47]=31$	$[48]=46$
$[49]=34$	$[50]=49$	$[51]=37$	$[52]=52$	$[53]=40$	$[54]=1$
$[55]=43$	$[56]=4$	$[57]=46$	$[58]=7$	$[59]=49$	$[60]=10$
$[61]=52$	$[62]=13$	$[63]=55$	$[64]=16$	$[65]=58$	$[66]=19$
$[67]=61$	$[68]=22$	$[69]=64$	$[70]=25$	$[71]=67$	$[72]=28$
$[73]=70$	$[74]=31$	$[75]=73$	$[76]=34$	$[77]=76$	$[78]=37$
$[79]=79$	$[80]=40$	$[81]=1$	$[82]=43$	$[83]=4$	$[84]=46$
$[85]=7$	$[86]=49$	$[87]=10$	$[88]=52$	$[89]=13$	$[90]=55$
$[91]=16$	$[92]=58$	$[93]=19$	$[94]=61$	$[95]=22$	$[96]=64$
$[97]=25$	$[98]=67$	$[99]=28$	$[100]=70$		

このうち，$[n]=n$ を満たす n は，$n=1$，4，7，16，25，52，79 の 7 個あります。

もう少しスマートに解くには次のような考え方があります。

$n=3\times3\times\cdots\times3\times3$ のときに $[n]=1$ となることは (2) で調べましたが，$[1]$ から $[100]$ までの値の並びを見ると，$n=2$，6，18，54 の場合も $[n]=1$ が成り立っています。これらは，$n=2$ の場合を除けば，$6\div2=3$，$18\div2=9=3\times3$，$54\div2=27=3\times3\times3$ のように，2 で割って素因数分解したときに現れる素数が 3 だけである数です。たとえば $n=18$ の場合の作業を具体的に調べてみると，

1 周目　①，$\cancel{2}$，$\cancel{3}$，④，$\cancel{5}$，$\cancel{6}$，……，⑬，$\cancel{14}$，$\cancel{15}$，⑯，$\cancel{17}$，$\cancel{18}$

2 周目　①，$\cancel{4}$，$\cancel{7}$，⑩，$\cancel{13}$，$\cancel{16}$

3 周目　①，$\cancel{10}$

となり，最後に 1 と 10 の 2 個残った内の 10 を取り除いて，$[18]=1$ であることが確かめられます。

同様に考えると，$n=2\times3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合は，最後に 1 と，1 とは異なる数の 2 個が残ってから 1 を残すので，$[n]=1$ です。

こうして，$n=3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合以外に，$n=2\times3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合にも $[n]=1$ の成り立つことが分かります。

ここで，(4) の答えである 7 個の数 $n=1$，4，7，16，25，52，79 を改めて見ると，いずれの数に対しても $[n+2]=1$ が成り立っています。このようなことが成り立つ理由は，(3) で $[7]=7$ から $[9]=1$ を調べたときと同様に分かります。

$n=3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合と，$n=2\times3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合以外に $[n]=1$ となる場合があるかどうか考えてみましょう。

この解説の最初に $n=10$ の場合を調べましたが，1，4，7，10 の 4 個が最初に残って，10 から並べ直したことで 1 が取り除かれたと分かります。このように 1 が取り除かれるのは，4 個という個数が 3 の倍数ではないからです。同様に，これまで調べて来たように 1 周目，2 周目，……と調べる途(と)中で，残り 2 個または 3 個になる最後の周よりも前に 3 の倍数ではない個数が初めて並んだ時点で，1 が取り除かれることが分かります。これを最後に残る 2 個または 3 個から逆算して考えると，$[n]=1$ が成り立つのは $n=2\times3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合と $n=3\times3\times\cdots\times3\times3$ の場合に限られることになります。

したがって，(4) の答えを簡潔に求める方法としては，

$n=2\times3=6$，$n=2\times3\times3=18$，$n=2\times3\times3\times3=54$，

$n=3$，$n=3\times3=9$，$n=3\times3\times3=27$，$n=3\times3\times3\times3=81$

のそれぞれから 2 を引いて個数を数える，という解き方が考えられます。

(5)　(4) で調べた $[1]$ から $[100]$ までの値を見るといずれも 3 で割ると 1 あまる数が並んでいます。これは，$[1]=1$，$[2]=1$ を定めた上で，

$[n-2]$ の値に 3 を足す。足した和がもし n よりも大きくなったら n を引く。

という作業を繰り返すと，n が 2 増えるごとに $[n]$ と n の値の差が 1 ずつ狭(せま)くなり，$[n]=n$ となった後は $[n+2]=1$ になることを繰り返しているからです。$[n]$ の値は 3 ずつ増えるので，1 から始まって 3 ずつ増える数が得られ，$[n]$ は 3 で割ると 1 あまる数だと分かります。

このとき，$[n]=n$ となる n の中で最大の数は，(4) より $n=79$ なので，$[1]$ から $[100]$ までに現れている数は，

$$1，4，7，\cdots，73，76，79$$

の，$(79-1)\div3+1=27$ 種類であると分かります。