

答 あ $\frac{8}{9}$, い $\frac{149}{140} \left(1 - \frac{9}{140}\right)$

解説 白い正方形と黒い正方形はともにいずれも1辺2cmの正方形であると考え、面積を直接計算してそれぞれの比を求めることにします。

最初に W_1 と B_1 を求めます。

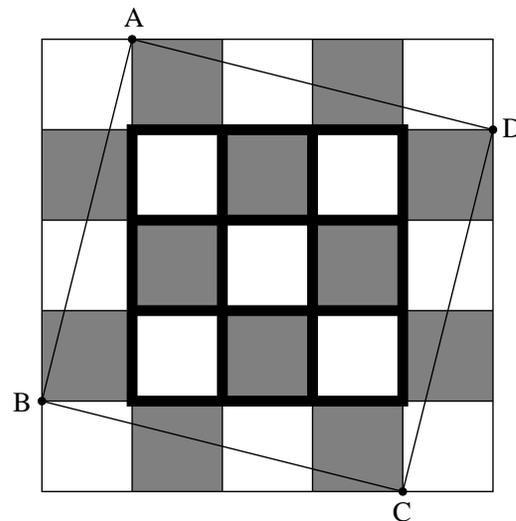
右図の中央部に太線で描いた白い正方形5枚の面積は

$$2 \times 2 \times 5 = 20 \text{ cm}^2,$$

黒い正方形4枚の面積は

$$2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

と、それぞれ求められます。



今調べた白い正方形5枚と黒い正方形4枚を正方形 ABCD から取り除くと、右の図に太線で描いたように、合同な直角三角形4枚が見つかります。このうち1枚の直角三角形の、白い部分と黒い部分の面積を調べてそれぞれ4倍しましょう。

直角三角形1枚は、白い部分と黒い部分が2か所ずつの計4か所に切り分けられています。これは、相似比が1:2:3:4である直角三角形が重なった形をしているので、面積は

$$(1 \times 1) : (2 \times 2 - 1 \times 1) : (3 \times 3 - 2 \times 2) : (4 \times 4 - 3 \times 3) \\ = 1 : 3 : 5 : 7$$

に切り分けられていると分かります。

直角三角形1枚の面積は $2 \times 8 \div 2 = 8 \text{ cm}^2$ ですから、直角三角形1枚の中の

$$\text{白い部分の面積は, } 8 \div (1 + 3 + 5 + 7) \times (1 + 5) = 3 \text{ cm}^2,$$

$$\text{黒い部分の面積は, } 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2$$

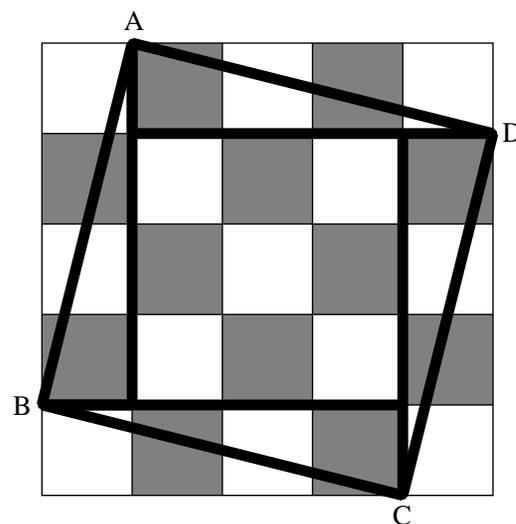
であると分かります。したがって、それぞれ4倍すると、

$$\text{白い部分の面積は, } 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

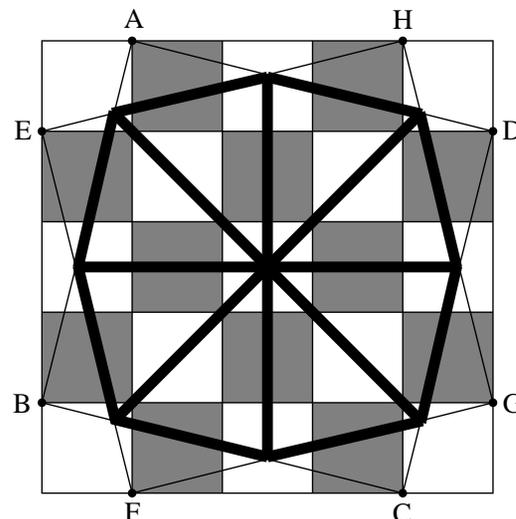
$$\text{黒い部分の面積は, } 5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$$

が求められます。

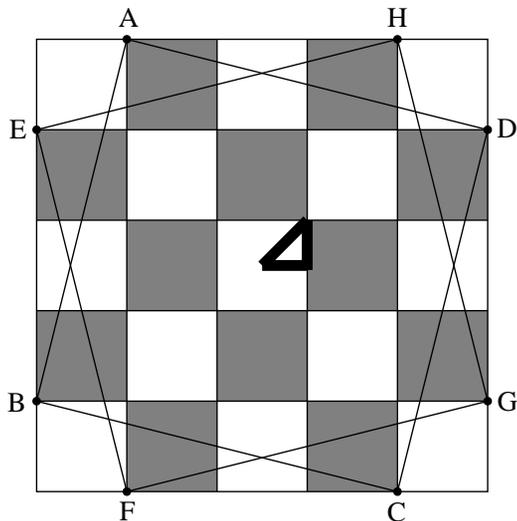
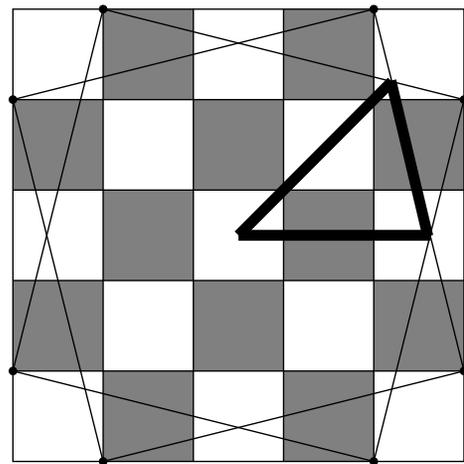
以上より、 $W_1 = 20 + 12 = 32 \text{ cm}^2$ 、 $B_1 = 16 + 20 = 36 \text{ cm}^2$ なので、あ は、 $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$ です。



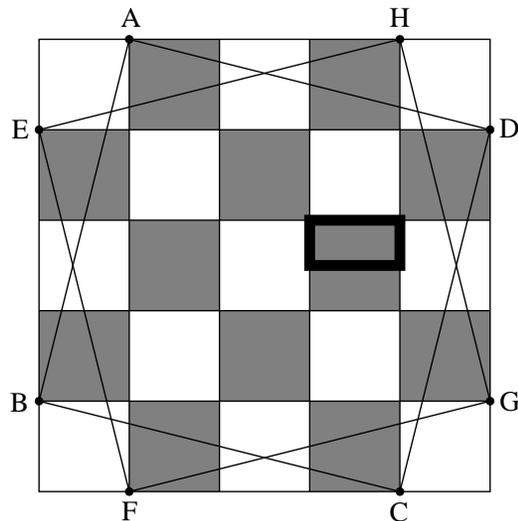
次に、正方形 ABCD と正方形 EFGH の重なった部分を見ると、右の図に太線で描いたように、合同な三角形8枚に切り分けられることが分かります。ですから、8枚の内1枚について、白い部分の面積と黒い部分の面積の比を求めれば、 $\frac{W_2 \div 8}{B_2 \div 8} = \frac{W_2}{B_2}$ が求められます。



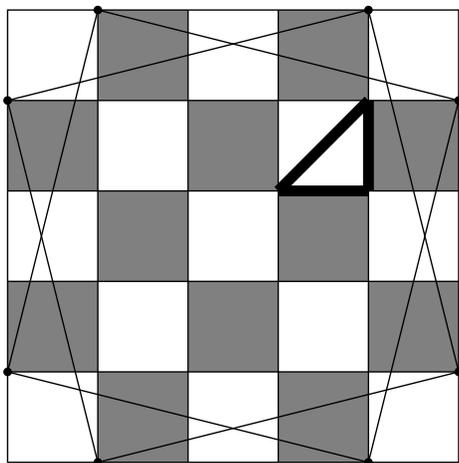
右の図に太線で描かれた三角形を考え、白い部分と黒い部分の面積をそれぞれ以下のように計算してみましょう。



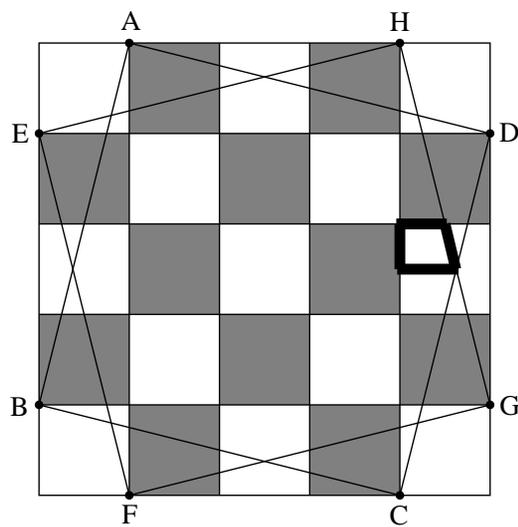
$$1 \times 1 \div 2 = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$$



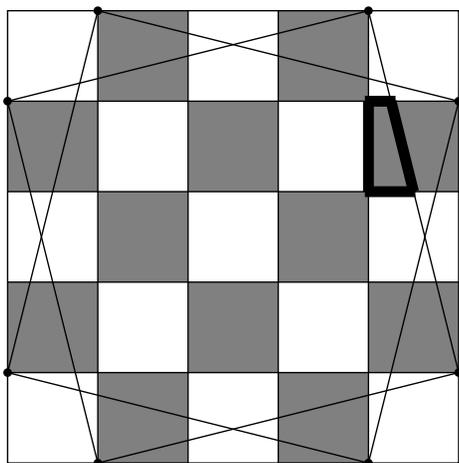
$$1 \times 2 = 2 \text{ cm}^2$$



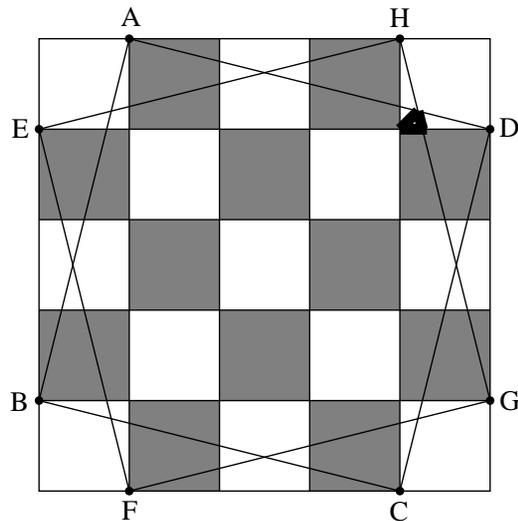
$$2 \times 2 \div 2 = 2 \text{ cm}^2$$



$$(1 + 1.25) \times 1 \div 2 = 1\frac{1}{8} \text{ cm}^2$$

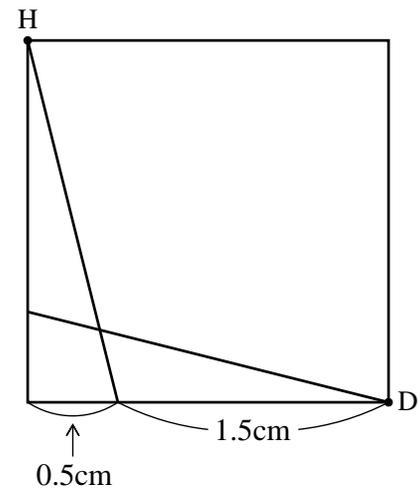


$$(0.5 + 1) \times 2 \div 2 = 1\frac{1}{2} \text{ cm}^2$$



この部分については次頁の
ように調べます。

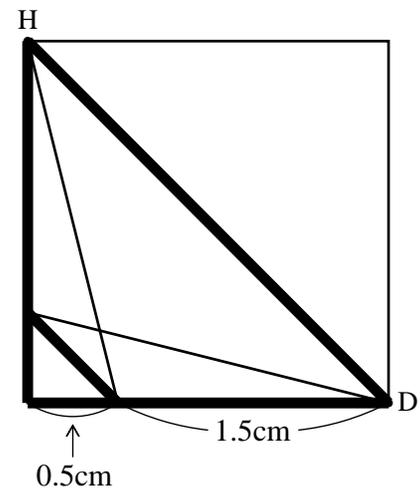
問題に与えられた図形の最も右上にある白い正方形は右のような形をしています。



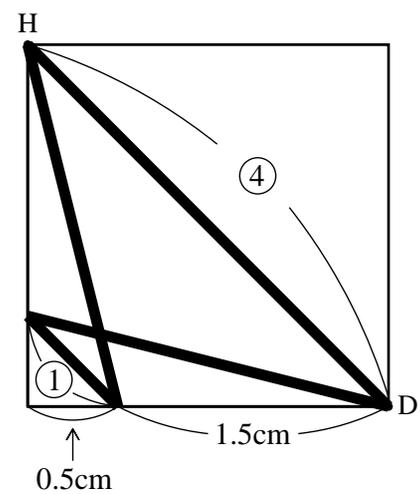
右の図に太線で描いた、重なっている相似な直角二等辺三角形の相似比は

$$0.5 : (0.5 + 1.5) = 1 : 4$$

と求められます。



ですから、右の図に太線で描いた相似な二等辺三角形の相似比も 1 : 4 であると分かります。



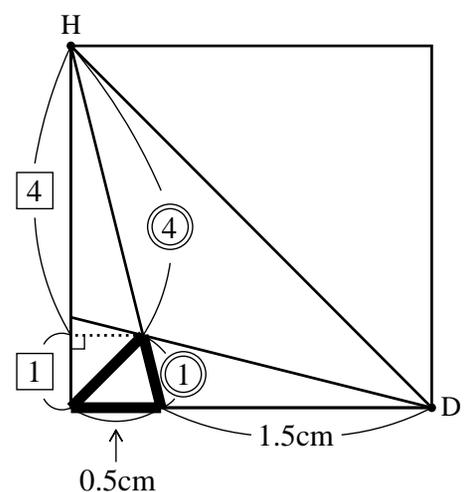
したがって、右の図に太線で描いた三角形の底辺を 0.5 cm とすると、高さが

$$2 \div (4 + 1) = 0.4 \text{ cm}$$

と求まるので、考えている三角形の面積を

$$0.5 \times 0.4 \div 2 = 0.1 \text{ cm}^2$$

と計算できます。



以上より、

$$W_2 \div 8 = \frac{1}{2} + 2 + 1\frac{1}{8} + \frac{1}{10} = 3\frac{29}{40} \text{ cm}^2, \quad B_2 \div 8 = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

なので、い は、 $\frac{W_2}{B_2} = 3\frac{29}{40} \div 3\frac{1}{2} = \frac{149}{40} \times \frac{2}{7} = \frac{149}{140}$ と求められます。