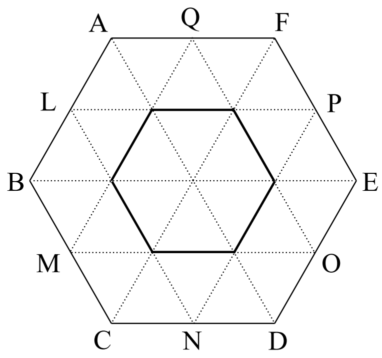
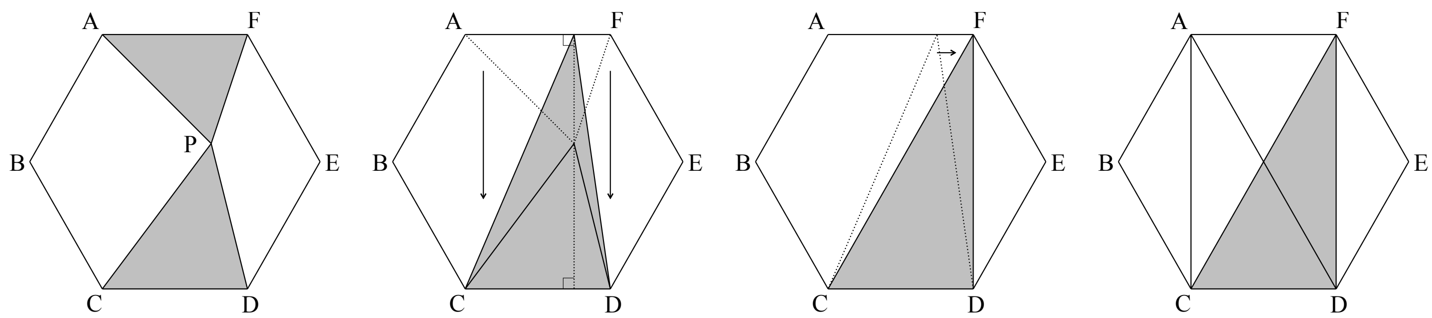
答 (1)　$\left(\dfrac{5}{18}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{18}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{12}\right)$，$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{12}, 0\right)$

(3)　AB，BC，CD，DE，EF，FA の中点をそれぞれ L，M，N，O，P，Q とする。このとき直線 LN，MO，NP，OQ，PL，QM によって囲まれてできる正六角形の周が求める図形である。この正六角形は元の正六角形の対称の中心を相似の中心とし，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似縮小した形になっている。



解説　正六角形の内部あるいは周上に一点 P をとると，三角形 PFA と三角形 PCD の面積の和は，正六角形の面積の $\dfrac{1}{3}$ に等しくなります。同様に，三角形 PAB と三角形 PDE の面積の和，三角形 PBC と三角形 PEF の面積の和も，共に正六角形の面積の $\dfrac{1}{3}$ に等しいです。



色がついた部分の面積の和は正六角形の面積の３分の１に等しい。

実際，等積変形をして，

さらに等積変形をすると，

色がついた部分の面積は，正六角形の面積を六等分したうちの２個分の面積に等しいので，３分の１と分かる。

(1)　三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$ で，AP : PC $= 1 : 2$ なので，

$$\text{三角形 PAB} = \frac{1}{6} \div (1+2) = \frac{1}{18}\,\mathrm{cm}^2,$$

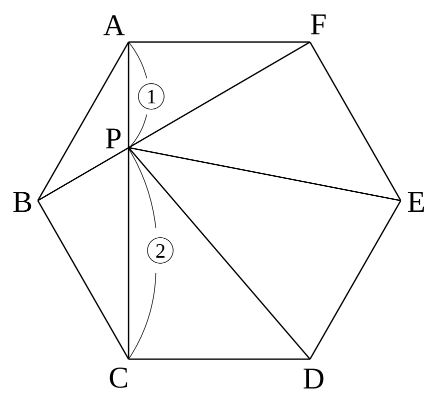
$$\text{三角形 PBC} = \frac{1}{6} \div (1+2) \times 2 = \frac{1}{9}\,\mathrm{cm}^2$$

であると分かります。したがって，

$$\text{三角形 PDE} = \frac{1}{3} - \text{三角形 PAB} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}\,\mathrm{cm}^2,$$

$$\text{三角形 PEF} = \frac{1}{3} - \text{三角形 PBC} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\,\mathrm{cm}^2$$

が求まります。また，三角形 PFA と三角形 PCD の面積の和は $\dfrac{1}{3}$ で，AP : PC $= 1 : 2$ なので，



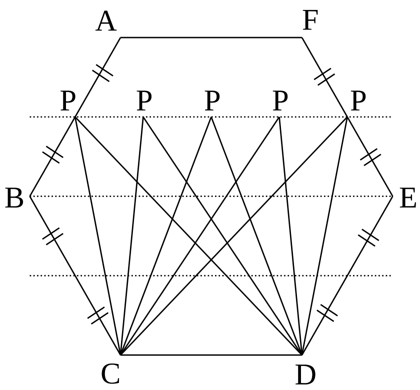
$$\text{三角形 PFA} = \frac{1}{3} \div (1+2) = \frac{1}{9}\,\mathrm{cm}^2,$$

$$\text{三角形 PCD} = \frac{1}{3} \div (1+2) \times 2 = \frac{2}{9}\,\mathrm{cm}^2$$

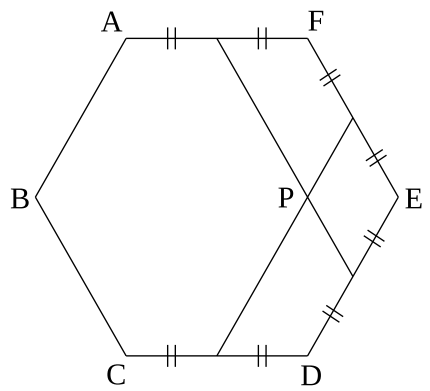
以上より，答えは　$\left(\dfrac{5}{18}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{18}\right)$ です。

(2)　すでに調べたように，三角形 FCD の面積は $\dfrac{1}{3}$ cm^2 です。

そこで，底辺を CD と見て高さを $\dfrac{3}{4}$ 倍に取ると，三角形 PCD の面積は $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ cm^2 です。したがって，右の図に描かれた三角形 PCD はいずれも面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 であると分かります。また，右の図で点 P をならべた直線上以外の位置に点 P を取ると，高さが変化するので三角形 PCD の面積は $\dfrac{1}{4}$ cm^2 にはなりません。

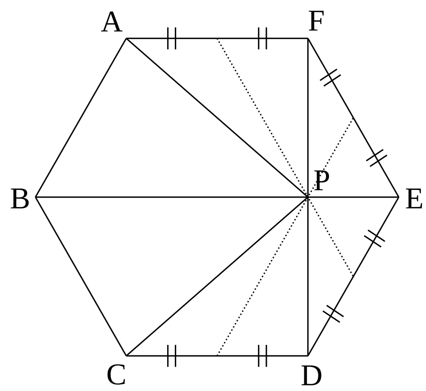


面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 である三角形が 2 個あるので，三角形 PAB と三角形 PBC の面積がどちらも $\dfrac{1}{4}$ cm^2 である場合を考えると，次の図が描けます。



三角形 PAB の面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 になる直線と，

三角形 PBC の面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 になる直線を引く。



三角形 PAB と三角形 PBC はどちらも $\dfrac{1}{4}$ cm^2

三角形 PDE は $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$ cm^2

三角形 PEF も同様に $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$ cm^2

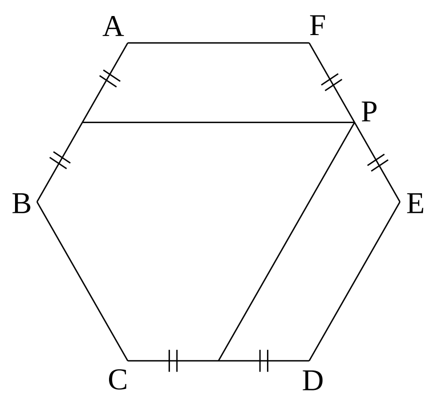
三角形 PFA と三角形 PCD の面積の和は $\dfrac{1}{3}$ cm^2 で，

今考えている図形は BE に関して対称なので，

三角形 PFA の面積は $\dfrac{1}{3} \div 2 = \dfrac{1}{6}$ cm^2

三角形 PCD の面積は $\dfrac{1}{3} \div 2 = \dfrac{1}{6}$ cm^2

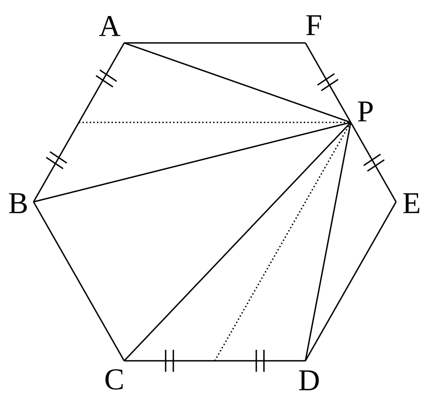
次に，三角形 PAB と三角形 PCD の面積がどちらも $\dfrac{1}{4}$ cm^2 である場合を考えると，次の図が描けます。



三角形 PAB の面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 になる直線と，

三角形 PCD の面積が $\dfrac{1}{4}$ cm^2 になる直線を

引くと，辺 EF の中点で交わる点 P が取れる。



三角形 PAB と三角形 PCD はどちらも $\dfrac{1}{4}$ cm^2

三角形 PBC は $\dfrac{1}{3}$ cm^2

三角形 PDE は $\dfrac{1}{6} \div 2 = \dfrac{1}{12}$ cm^2

三角形 PFA も $\dfrac{1}{6} \div 2 = \dfrac{1}{12}$ cm^2

三角形 PEF は 0 cm^2

三角形 PAB と三角形 PDE の面積の和は $\frac{1}{3}$ cm^2 なので，三角形 PAB の面積と三角形 PDE の面積はともに $\frac{1}{4}$ cm^2 にはなりません。面積がともに $\frac{1}{4}$ cm^2 である 2 個の三角形を他に取ることもできますが，いずれの場合も，以上調べたいずれかの場合と同様に考えることができます。

したがって，答えは $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0\right)$ です。

(3)　(2) で調べたように，三角形 PAB の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線に加えて，三角形 PBC の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線，三角形 PCD の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線，三角形 PDE の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線，三角形 PEF の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線，三角形 PFA の面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 になる直線を考えます。PA，PB，PC，PD，PE，PF によって正六角形を切り分けてできる 6 個の三角形の面積のうち，$\frac{1}{4}$ cm^2 が最大である場合とは，解答の図に描いた内側の正六角形の周上に点 P があるときであり，そのときに限ります。実際，この正六角形の外側に点 P があるときは面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 よりも大きい三角形ができます。また，内側に点 P をとると，いずれの三角形の面積も $\frac{1}{4}$ cm^2 より小さくなります。周上に点 P をとると，面積が $\frac{1}{4}$ cm^2 である三角形が 1 個または 2 個できて，他の三角形の面積は $\frac{1}{4}$ cm^2 よりも小さくなります。