答 (1)　90 通り

(2)　1260 通り

(3)　7 通り

(4)　5 通り

解説 (1)　聖さんの選ぶカードが 10 枚のカードのうち 1 枚で 10 通りあり，光さんの選ぶカードが残り 9 枚のうち 1 枚で 9 通りと考えると，全部で $10 \times 9 = 90$ 通りの組み合わせがあると考えられます。

(2)　聖さんの選ぶカードが 10 枚のカードのうち 2 枚で $10 \times 9 \div 2 = 45$ 通りあり，光さんの選ぶカードが残り 8 枚のうち 2 枚で $8 \times 7 \div 2 = 28$ 通りと考えると，全部で $45 \times 28 = 1260$ 通りの組み合わせがあると考えられます。

(3)　10 枚のカードに書かれた数の和は，$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$ です。聖さんのカードに書かれた数の和は光さんのカードに書かれた数の和よりも 15 大きいので，

$$\text{聖さんのカードに書かれた数の和} = (55 + 15) \div 2 = 35$$
$$\text{光さんのカードに書かれた数の和} = 35 - 15 = 20$$

したがって，5 枚のカードに書かれた数の和が 20 になる場合の数が答えであると分かります。それは次の 7 通りです。

```
1 ─ 2 ─ 3 ─ 4 ─10
            5 ─ 9
            6 ─ 8
        4 ─ 5 ─ 8
            6 ─ 7
    3 ─ 4 ─ 5 ─ 7
2 ─ 3 ─ 4 ─ 5 ─ 6
```

(4)　光さんのカードに書かれた数の積を $\square$ とすると，聖さんのカードに書かれた数の積は $\square \times 7$ です。このとき，

$$\square \times \square \times 7 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

なので，

$$\square \times \square = (2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) \times (8 \times 9 \times 10) = 720 \times 720$$

より，$\square = 720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ と分かります。したがって，5 枚のカードに書かれた数の積が 720 になる場合の数が答えであると分かります。素因数分解して現れる素数が 2，3，5 であることから，5 枚のカードには偶数，3 の倍数，5 の倍数がそれぞれ少なくとも 1 枚ふくまれています。特に，3 の倍数がふくまれていることから，3 または 6 または 9 がふくまれています。また，5 の倍数がふくまれていることから，5 または 10 がふくまれています。大きな数に注目すると残りの数が小さくなって調べやすいので，ここでは 9 と 10 に注目する場合分けで調べてみましょう。

①　選んだ 5 枚のカードが 9 も 10 もふくむ場合。残り 3 枚のカードに書かれた数の積は $720 \div 9 \div 10 = 8$ で，そうなるのは $1 \times 2 \times 4 = 8$ の 1 通りだけです。

②　選んだ 5 枚のカードが 9 をふくむが 10 をふくまない場合。5 の倍数のカードをふくむので 5 を選んでいます。5 と 9 以外の，残り 3 枚のカードに書かれた数の積は $720 \div 9 \div 5 = 16$ で，そうなるのは $1 \times 2 \times 8 = 16$ の 1 通りだけです。

③　選んだ 5 枚のカードが 9 をふくまないが 10 をふくむ場合。720 を素因数分解すると 3 が 2 回現れていたので，3 と 6 を選んでいます。したがって，3 と 6 と 10 以外の，残り 2 枚のカードに書かれた数の積は $720 \div 3 \div 6 \div 10 = 4$ で，そうなるのは $1 \times 4 = 4$ の 1 通りだけです。

④　選んだ 5 枚のカードに 9 も 10 もふくまれない場合。③ と同様に，3 と 6 を選んでいます。残り 3 枚のカードに書かれた数の積は $720 \div 3 \div 6 = 40$ で，そうなるのは $1 \times 5 \times 8 = 40$ と $2 \times 4 \times 5 = 40$ の 2 通りです。

以上より，計 $1 + 1 + 1 + 2 = 5$ 通りが答えです。