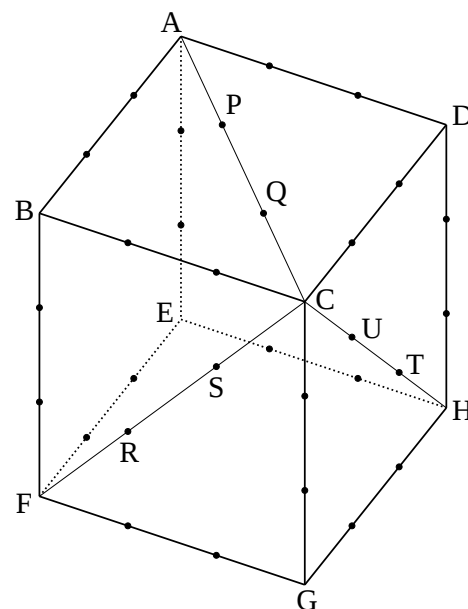


答 (1) 13 : 4

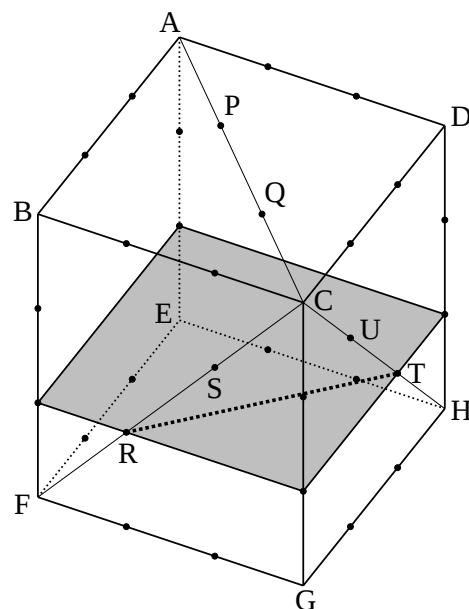
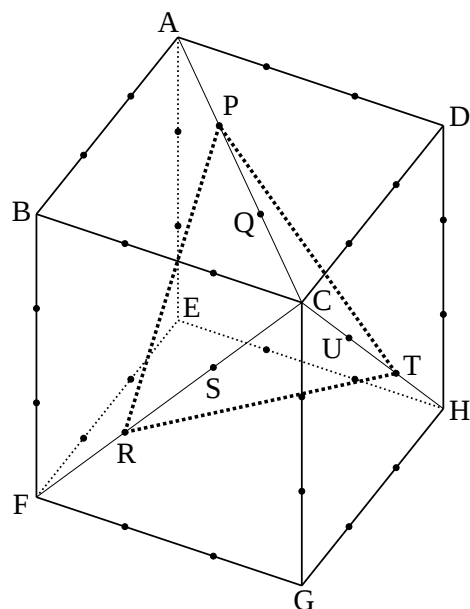
(2) 5 : 16

解説 問題文に述べられている点 P, Q, R, S, T, U は, 右のように図に書き込むことができます。ただし, 右の図では, 後の説明がしやすいように, 対角線 AC, FC, HC のみならず, 立方体の各辺の3等分点も書いてあります。

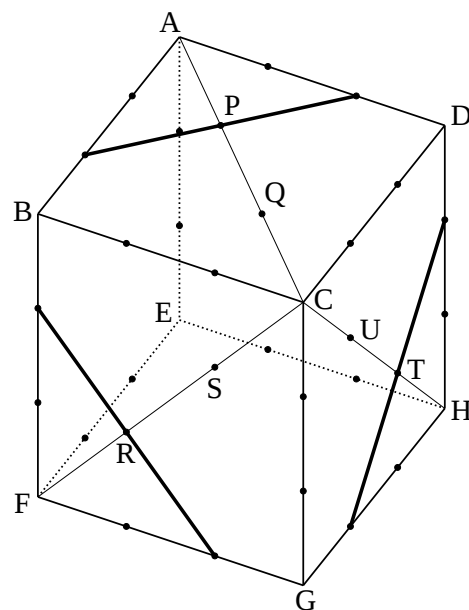
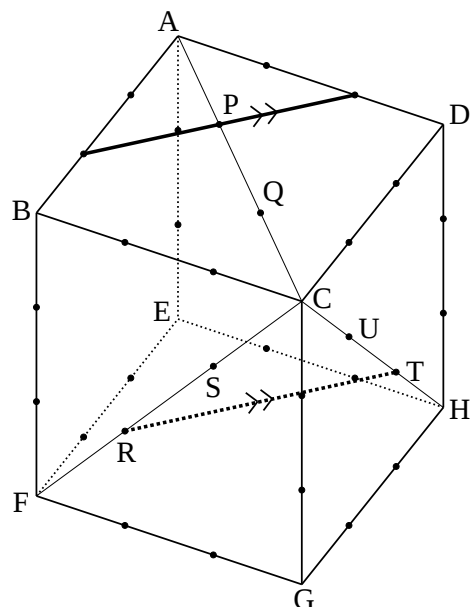


(1) 立方体を3点 P, R, T を通る平面で切断したときにできる切り口の図形 (ア) を考えます。

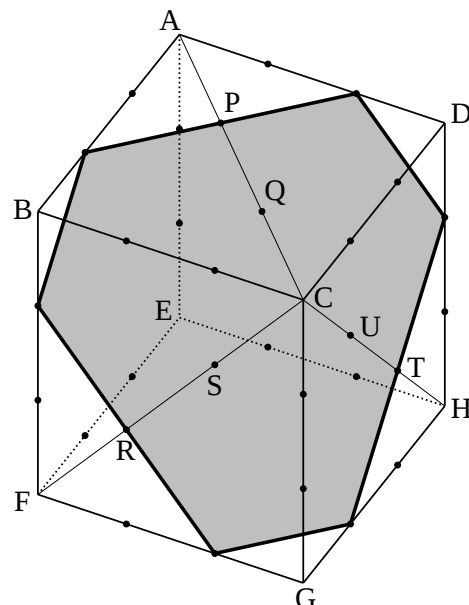
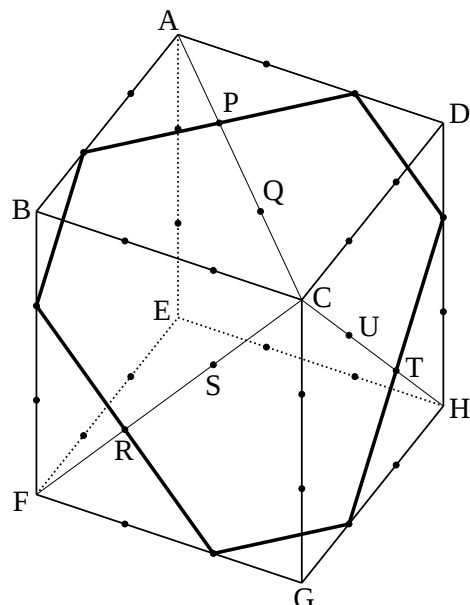
- ① PR, RT, TP は, いずれも立方体の内部 ② RT は, 面 ABCD に平行な, 点 R と点 T を通る面 (直後の図で色をつけた面) に含まれています。



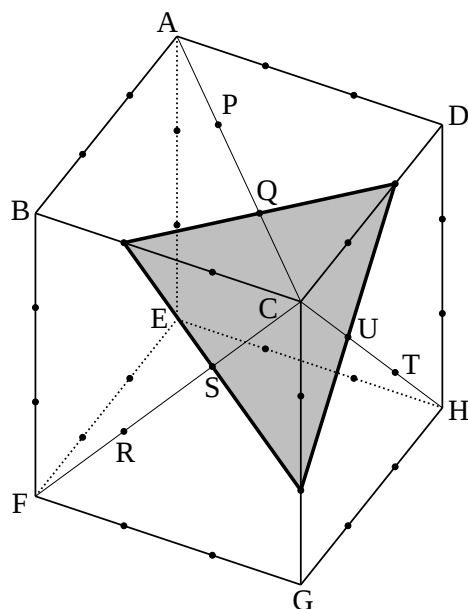
- ③ 平行な面を通る切り口の線は平行になるので, 切り口の線として, 点 P を通り RT に平行な線が描けます。 ④ 同様に, 点 R を通り PT に平行な線, 点 T を通り PR に平行な線が, それぞれ描けます。



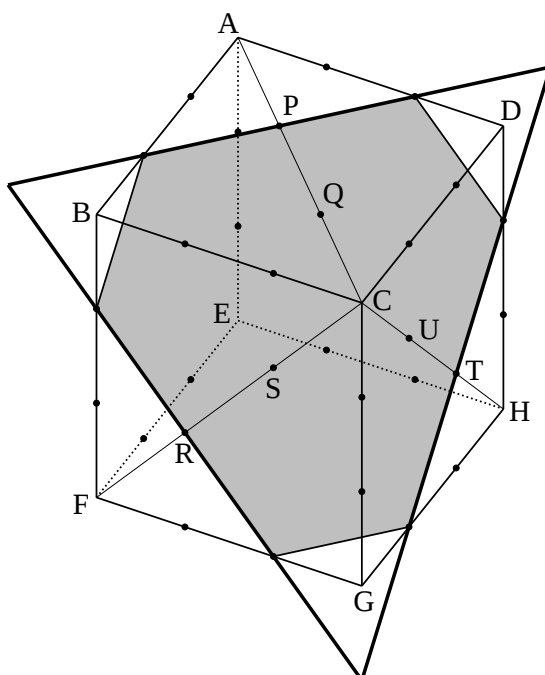
- ⑤ 立方体の表面をって1周するように、残 ⑥ 図形(ア) (直後の図で色をつけた面) が完  
りの切り口の線を描きます。 成。



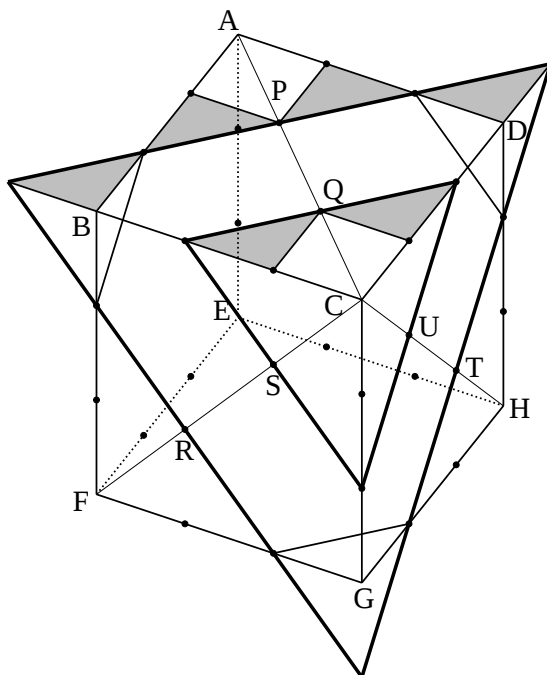
次に、立方体を3点 Q, S, U を通る平面で切断したときにできる切り口の図形(イ)を考えます。QS, SU, UQ はいずれも立方体の内部を通るので切り口の線にはなりません。そこで、Q を通り SU に平行な直線、S を通り UQ に平行な直線、U を通り SQ に平行な直線を結ぶと切り口の線が得られます。図形(イ)は正三角形です。



また、図形(ア)の辺を次の図のように伸ばしても正三角形が描けます。



図形(ア)の辺を伸ばして得られる正三角形と、図形(イ)の相似比は2:1です。これは、次の図のように合同な直角二等辺三角形が見つかることから分かります(色のついた直角二等辺三角形は全て合同)。

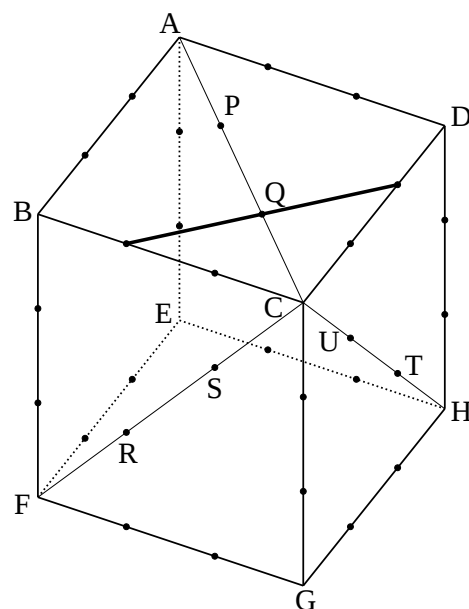
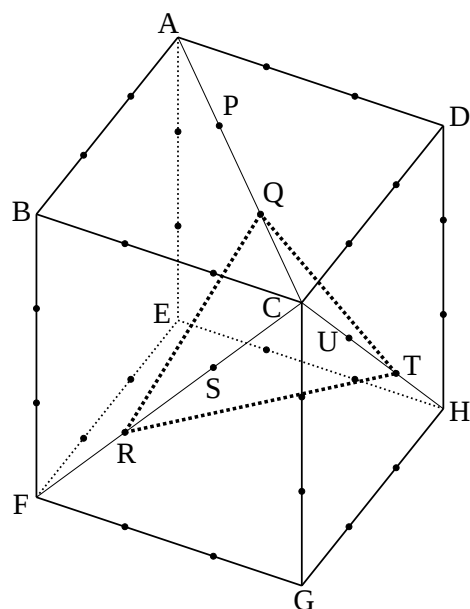


ここで、正三角形である図形(イ)の1辺の長さを2とすると、図形(ア)は1辺の長さが4である正三角形から、1辺の長さが1である正三角形を3枚切り取った形であると考えられます。したがって、求める面積比は、

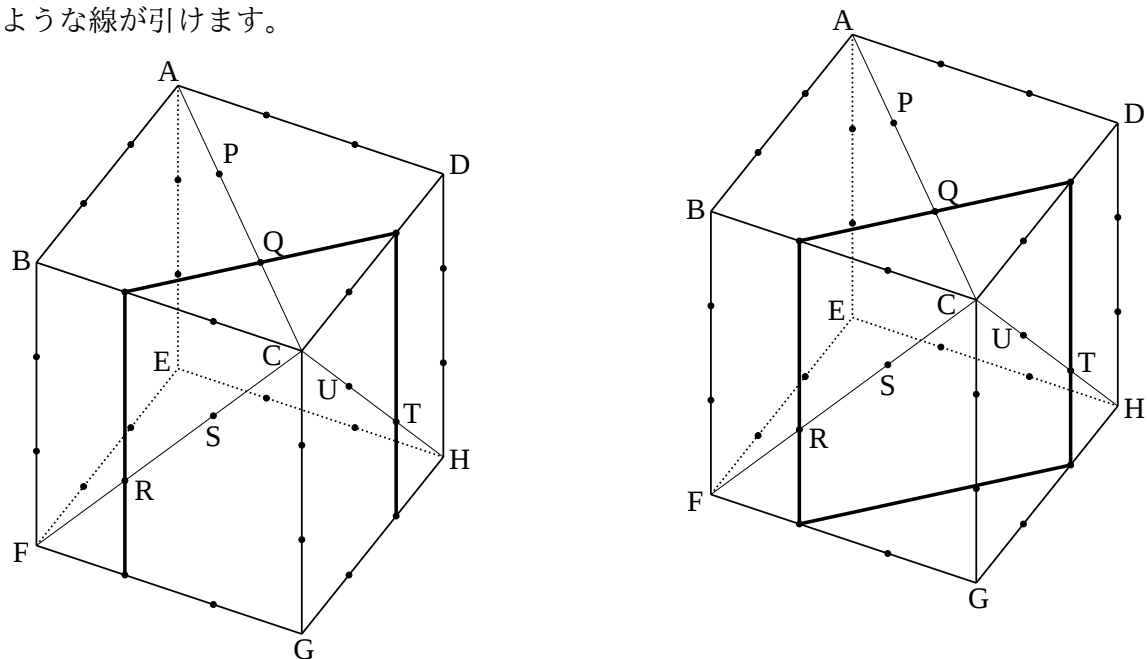
$$(4 \times 4 - 1 \times 1 \times 3) : (2 \times 2) = 13 : 4$$

- (2) 立方体を3点P, R, Tを通る平面で切断したときにできる切り口は、(1)で描いた図形(ア)です。さらに、立方体を3点Q, R, Tを通る平面で切断したときにできる切り口を考えます。

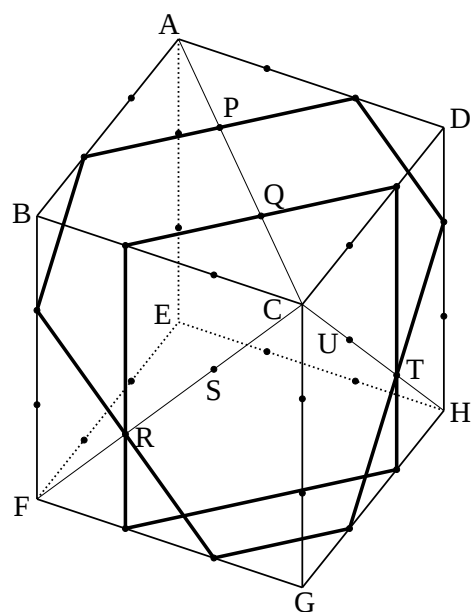
- ① QR, RT, TQは、いずれも立方体の内部に描かれるので、切り口の図形の辺にはなりません。
- ② そこで、(1)で図形(ア)の切り口を考えたときと同様に考えて、Qを通りRTに平行な直線を考えます。



- ③ さらに、切り口の線が点 R と点 T を通ることから、立方体の表面を通るように、下の図のような線が引けます。
- ④ 立方体の表面を通り、1 周するように切り口の線を完成させます。

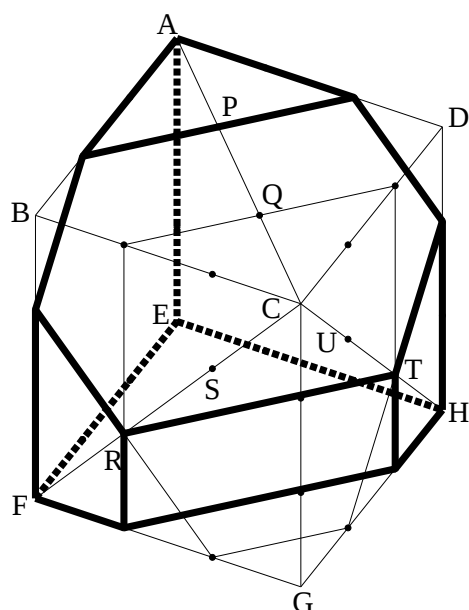


今考えていた、3 点 Q, R, T を通る切り口の線を、(1) の図形 (ア) の切り口の線と重ねて描くと次のような図が描けます。

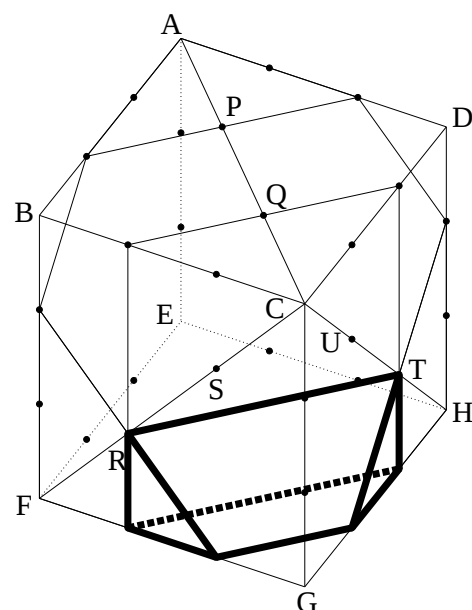


この図で 2 枚の切り口が交わる線である RT を引くと、立方体が 4 個に切り分けられることが分かります。それらを、次に太線で描くように、立体 W, 立体 X, 立体 Y, 立体 Z とそれぞれ呼ぶことにしましょう。

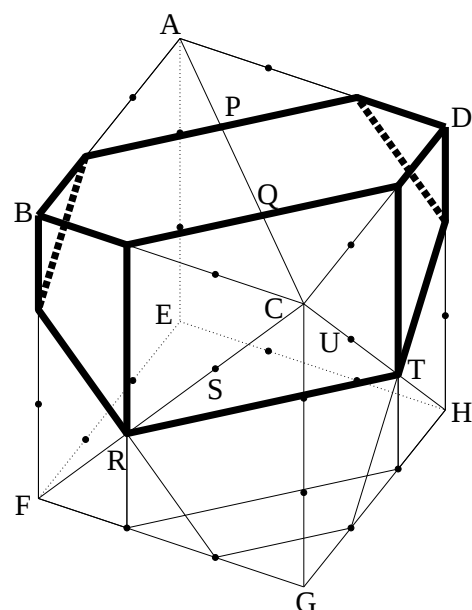
立体 W



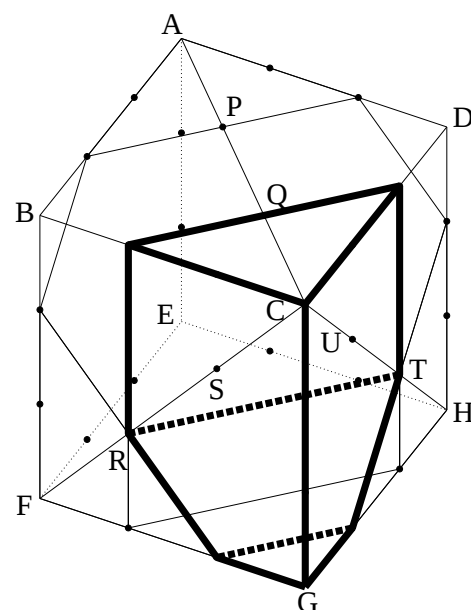
立体 X



立体 Y



立体 Z



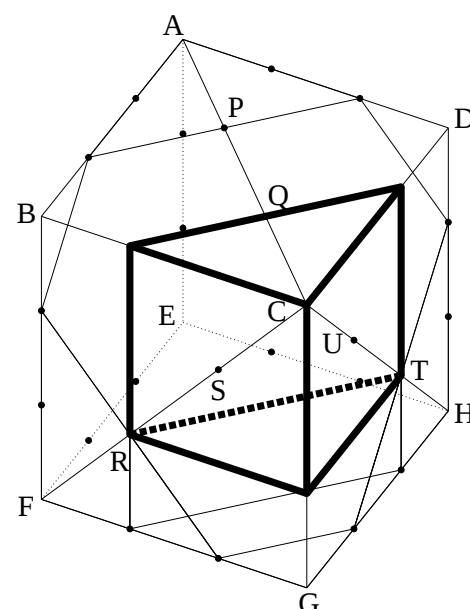
問題文で問われている「点 B を含む立体と点 E を含む立体の体積の比」は、立体 Y と立体 W の体積の比です。

これを求めるためにまず、立方体の 1 辺の長さを 3 とし、立体 Z の体積を求めましょう。

右の図に太線で描いた図形は、等しい辺の長さが 2 である直角二等辺三角形を底面に持ち、高さが 2 である三角柱で、その体積は

$$2 \times 2 \div 2 \times 2 = 4$$

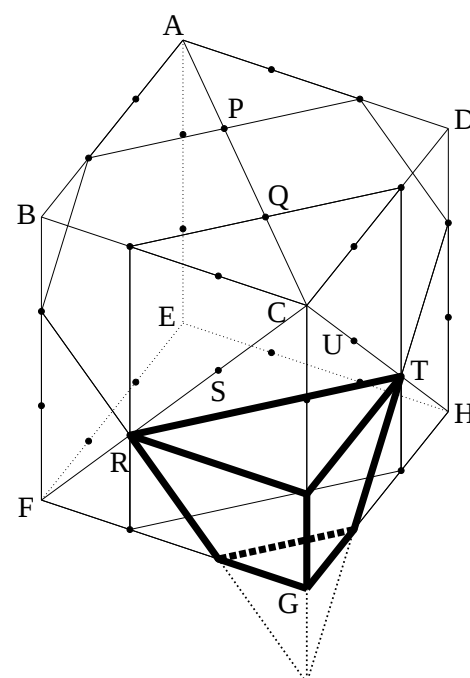
と求まります。



右の図に太線で描いた図形は、等しい辺の長さが 2 である直角二等辺三角形を底面に持ち高さが 2 である三角すいから、等しい辺の長さが 1 である直角二等辺三角形を底面に持ち高さが 1 である三角すいを取りのぞいた形をした図形で、その体積は

$$2 \times 2 \div 2 \times 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = 1 \frac{1}{6}$$

と求まります。



したがって立体 Z の体積は、 $4 + 1 \frac{1}{6} = 5 \frac{1}{6}$  です。

次に、立体 X と立体 Z を合わせると、等しい辺の長さが 2 である直角二等辺三角形を底面に持ち高さが 3 である三角柱ができることに注意します。三角柱の体積は

$$2 \times 2 \div 2 \times 3 = 6$$

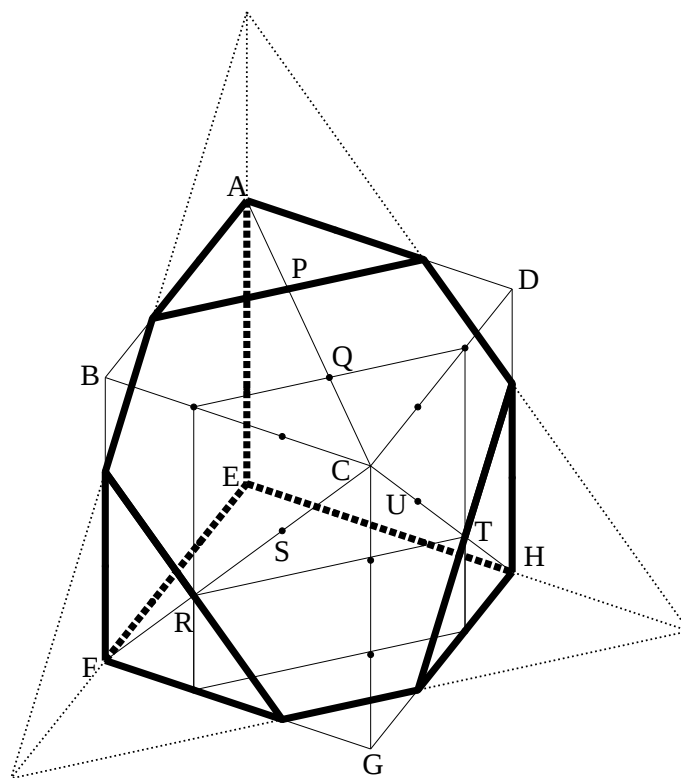
なので、立体 X の体積は  $6 - 5 \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  です。

ここで、立方体の体積が  $3 \times 3 \times 3 = 27$  なので、立体 W と立体 Y を合わせてできる五角柱の体積が  $27 - 6 = 21$  であることに注意しましょう。

また、立体 W と立体 X を合わせた形は、直後の図のように、等しい辺の長さが 5 である直角二等辺三角形を底面に持ち高さが 5 である三角すいから、等しい辺の長さが 2 である直角二等辺三角形を底面に持ち高さが 2 である三角すいを 3 個取りのぞいた形をした図形で、その体積は

$$5 \times 5 \div 2 \times 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 5 \times 5 - 2 \times 2 \times 2 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = 16 \frac{5}{6}$$

と求められます。



以上より、立体 W の体積は  $16 \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 16$  です。

このとき、立体 Y の体積は  $21 - 16 = 5$  と求められます。

ゆえに求める体積の比は 5 : 16 です。