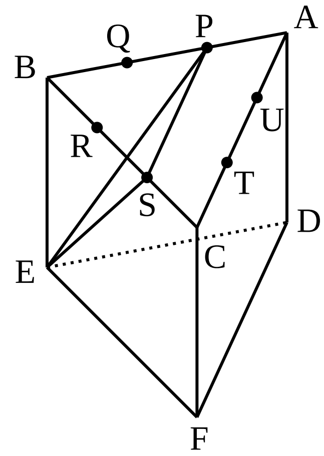
答 (1) $\dfrac{23}{27}\,\mathrm{cm}^3$

(2) $\dfrac{77}{108}\,\mathrm{cm}^3$

(3) $\dfrac{9}{16}\,\mathrm{cm}^3$

解説 (1)　正三角柱 ABC-DEF の体積から三角錐(すい)E-PBS の体積を引いて答えを求めます。



正三角柱 ABC-DEF の底面である正三角形 ABC の面積を 1 とすると，正三角錐 E-PBS の底面にできる正三角形 PBS の面積は

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

です。

正三角柱 ABC-DEF の高さを 1 とすると，正三角錐 E-PBS の高さも等しく 1 です。

したがって，正三角錐 E-PBS の体積は，

$$\frac{4}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}\,\mathrm{cm}^3$$

と計算できます。したがって，求める体積は，

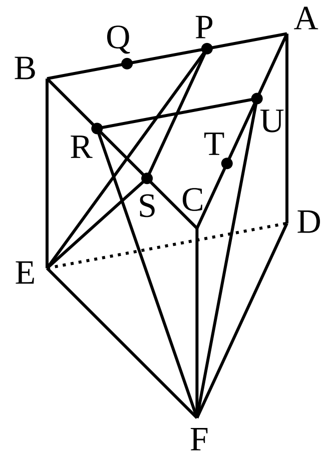
$$1-\frac{4}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}\,\mathrm{cm}^3$$

であると分かります。

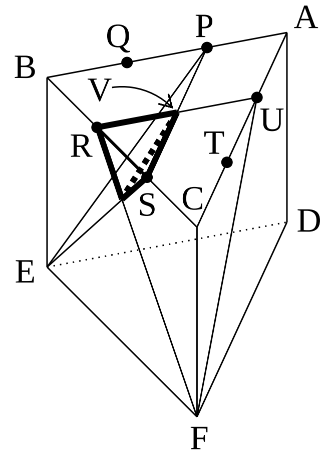
(2)　平面（あ）と（い）は右の図のように描けます。

正三角錐 E-PBS の体積は，(1) で求めたように，$\dfrac{4}{27}\,\mathrm{cm}^3$ です。

正三角錐 F-CUR の体積も，正三角錐 E-PBS の体積と同様に求めることができて，$\dfrac{4}{27}\,\mathrm{cm}^3$ です。



このとき，答えを求めるために正三角柱 ABC-DEF の体積 $1\,\mathrm{cm}^3$ から $\dfrac{4}{27}\,\mathrm{cm}^3$ を 2 回引くと，右の図に太線で描いた共通部分（正三角錐）を重ねて引いてしまうことになるので，2 回引いた後で共通部分の体積を 1 回足す必要が有ります。



PS と RU の交点を V とすると，正三角形 RSV と正三角形 ABC の相似比は 1 : 3 で，面積比は 1 : 9 なので，正三角形 ABC の面積を 1 とすれば，正三角形 RSV の面積は $\dfrac{1}{9}$ と求まります。

次に，右の図に太線で描いた三角形の組は相似で，相似比は $1:3$ なので，体積を求めたい共通部分の高さは，三角形 RSV を底面とすると，$\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$ です。したがって，共通部分の体積は，

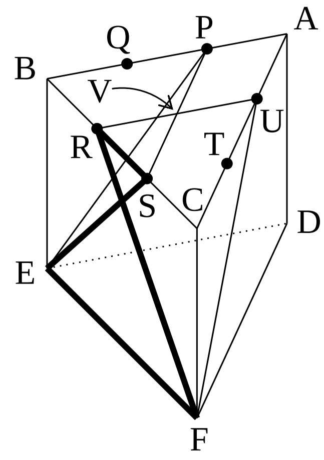
$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{108}$$

と求まります。

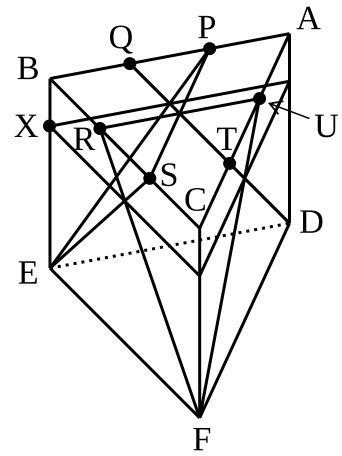
以上より，(2) の答えは，

$$1-\frac{4}{27}-\frac{4}{27}+\frac{1}{108}=\frac{77}{108}\,\mathrm{cm}^3$$

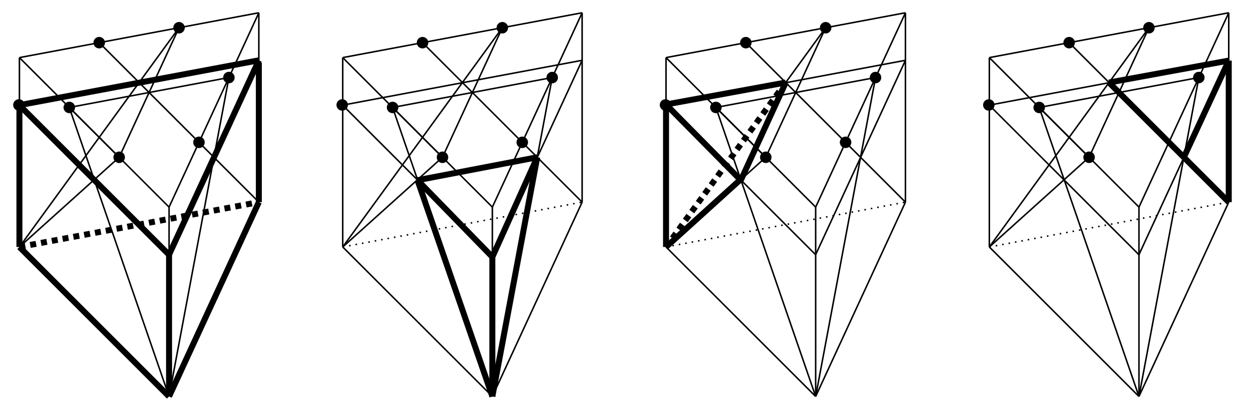
と計算できます。



(3)　平面（あ）（い）（う）（え）は右の図のように描けます。(2) で考えた相似な三角形の相似比 $1:3$ を思い出すと，相似の中心を，点 X を通る平面（え）が通ることが分かります。



求める体積は，次のうち，最も左の図に太線で描かれた正三角柱の体積から，右側の３個の図にそれぞれ描かれた正三角錐の体積を引いて計算できます。



最も左の図に太線で描かれた正三角柱の体積は，高さが正三角柱 ABC-DEF の $\dfrac{3}{4}$ であることから，$\dfrac{3}{4}\,\mathrm{cm}^3$ と求まります。

右側の３個の図にそれぞれ描かれた正三角錐の体積はいずれも，考えている正三角錐が (1) や (2) で体積 $\dfrac{4}{27}\,\mathrm{cm}^3$ と求めた正三角錐と相似で相似比が $3:4$ であることから，

$$\frac{4}{27}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16}\,\mathrm{cm}^3$$

と算出できます。よって，(3) の答えは，

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{16}\times 3=\frac{9}{16}\,\mathrm{cm}^3$$

と求まります。