

答 (1) 1, 4, 9

(2) 番号が99のロッカーは6回, 番号が100のロッカーは9回, 番号が101のロッカーは1回

(3) 106個

解説 番号が1から100までのロッカーの開閉回数(開けた回数と閉めた回数の合計)について, 最初に考えてみましょう。例えば番号が50のロッカーを開閉するのは,

1回目, 2回目, 5回目, 10回目, 25回目, 50回目

の計6回です。これは, 50の約数の個数を数えたこととなります。同様に, 番号が1から100までのロッカーの開閉回数は, それぞれの番号の約数の個数に等しくなります。

次に, 番号が101から200までのロッカーの開閉回数について考えてみましょう。例えば番号が150のロッカーを開閉するのは,

1回目, 2回目, 3回目, 5回目, 6回目, 10回目, 15回目, 25回目, 30回目, 50回目, 75回目

の計11回です。これは, 150の約数のうち, 150以外の個数を数えたこととなります。150を数えない理由は, 操作が100回目までで, 150回目の操作は行われなからです。同様に, 番号が101から200までのロッカーの開閉回数は, それぞれの番号の約数の個数から, 番号それ自体の1個を引いた個数に等しくなります。

(1) ロッカーは最初すべて閉まっていたので, 操作を終えた後ロッカーが開いているためには, 開閉回数が奇数回でなければなりません。1から10までの番号(100以下)を考えるので, 求める番号として, 約数の個数が奇数個である整数を選べば良いこととなります。同じ整数を2個かけた答えを平方数と言いますが, 約数の個数が奇数個になるのは平方数であり, 平方数に限ります。1から10までの番号で言えば,

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9$$

の3個が平方数であり, 問(1)の答えです。

(2) 番号が99のロッカーを開閉するのは,

1回目, 3回目, 9回目, 11回目, 33回目, 99回目

の計6回です。

番号が100のロッカーを開閉するのは,

1回目, 2回目, 4回目, 5回目, 10回目, 20回目, 25回目, 50回目, 100回目

の計9回です。

番号が101のロッカーを開閉するのは,

1回目

の1回です。

(3) 問(1)でも見たように, 操作を終えた後ロッカーが開いているためには, 開閉回数が奇数回でなければなりません。1から100までの番号からは, 平方数を選べば良いので, 番号が

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

の10個のロッカーが開いています。次に, 101から200までの番号については,

$$\text{開閉回数} = \text{約数の個数} - 1$$

なので, 約数の個数が偶数個である番号, つまり, 平方数以外の番号を選びます。101から200までの100個の整数のうち, 平方数は

121, 144, 169, 196

の4個あるので, $100 - 4 = 96$ 個が平方数ではありません。したがって, 番号が101から200までのロッカーのうち, 96個が操作を終えた後に開いている事になります。

以上より, 開いているロッカーの個数は全部で $10 + 96 = 106$ 個であると分かります。