

- 答 (1)  $\frac{29}{32}$  km  
 (2) 東に  $\frac{133}{2048}$  km  
 (3) 1017

解説 (1) 工事1で看板 2 まで立てた時、隣り合う看板の間隔は  $\frac{1}{2}$  km になっています。  
 工事2で看板 4 まで立てた時、隣り合う看板の間隔は  $\frac{1}{4}$  km になっています。  
 工事3で看板 8 まで立てた時、隣り合う看板の間隔は  $\frac{1}{8}$  km になっています。

以下同様に、番号を順に2倍した看板まで立てるたびに、隣り合う看板の間隔はそれに応じて半分  
 の長さになるので、看板

$$16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$$

まで立てた時に、隣り合う看板の間隔はそれぞれ、

$$\frac{1}{16} \text{ km}, \frac{1}{32} \text{ km}, \frac{1}{64} \text{ km}, \frac{1}{128} \text{ km}, \frac{1}{256} \text{ km}, \frac{1}{512} \text{ km}, \frac{1}{1024} \text{ km}, \frac{1}{2048} \text{ km}$$

になります。

0 の看板と 31 の看板の間の距離を求めるために、16 まで看板を立ててから、17, 18, 19, ……と、31 まで看板を立てる過程を考えてみましょう。

0 の看板と 17 の看板の間の距離は、32 まで看板を立てたときの隣り合う看板の間隔に  
 等しいので、 $\frac{1}{32}$  km です。

17 の看板と 18 の看板の間の距離は、2本の看板の間に前の工事で立てた看板が既に1本  
 立っている事から、 $\frac{1}{32} \times 2 = \frac{1}{16}$  km になります。

18 の看板と 19 の看板の間の距離も、2本の看板の間に前の工事で立てた看板が既に1本  
 立っている事から、 $\frac{1}{32} \times 2 = \frac{1}{16}$  km になります。

以下同様に、31まで番号を1つ増やして看板を立てるごとに、0 の看板から  $\frac{1}{16}$  km 離れる事が  
 分かります。

17 の看板と 31 の看板の間は  $31 - 17 = 14$  ヲ所あるので、求める距離は、

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{16} \times 14 = \frac{29}{32} \text{ km}$$

(2) 0 の看板と 2019 の看板の間の距離を求めるために、1024 まで看板を立ててから、  
 1025, 1026, 1027, ……と、2019 まで看板を立てる過程を考えてみましょう。

0 の看板と 1025 の看板の間の距離は、2048 まで看板を立てたときの隣り合う看板の間  
 隔に等しいので、 $\frac{1}{2048}$  km です。

1025 の看板と 1026 の看板の間の距離は、2本の看板の間に前の工事で立てた看板が既  
 に1本立っている事から、 $\frac{1}{2048} \times 2 = \frac{1}{1024}$  km になります。

1026 の看板と 1027 の看板の間の距離も、2本の看板の間に前の工事で立てた看板が既  
 に1本立っている事から、 $\frac{1}{2048} \times 2 = \frac{1}{1024}$  km になります。

以下同様に、2019まで番号を1つ増やして看板を立てるごとに、0 の看板から  $\frac{1}{1024}$  km 離れ  
 る事が分かります。

1025 の看板と 2019 の看板の間は  $2019 - 1025 = 994$  ヲ所あるので、0 の看板と 2019 の看板の間の距離は、

$$\frac{1}{2048} + \frac{1}{1024} \times 994 = \frac{1989}{2048} \text{ km}$$

になります。(1) で求めた距離との差を計算すると、

$$\frac{1989}{2048} - \frac{29}{32} = \frac{133}{2048} \text{ km}$$

なので、31 の看板から東に  $\frac{133}{2048}$  km 進むと 2019 の看板に着くと分かります。

(3) 0 の看板を 1 個目と数える事に注意して、0 の看板から、2019 個目の看板までの距離を求めると、

$$\frac{2019 - 1}{2048} = \frac{2018}{2048} = \frac{1009}{1024} \text{ km}$$

になります。これは、

$$\frac{1009}{1024} = \frac{1}{1024} + \frac{1}{512} \times 504$$

と表せる数です。0 の看板と、512 まで看板を立てた次の看板である 513 の看板の間の距離は、1024 まで看板を立てたときの隣り合う看板の間隔に等しいので、 $\frac{1}{1024}$  km になります。

あと 504 本の看板を立てると 0 の看板との距離が  $\frac{1009}{1024}$  km になることから、求める番号は

$$513 + 504 = 1017$$

であると分かります。